M. X - DYNAMIQUE - INTERACTION DE DEUX POINTS

1. Mobile relatif et masse réduite

1.1. Définitions

• L'interaction dans un système (isolé) de deux points matériels M_1 et M_2 peut être décrite par : $m_1 \overrightarrow{a_1} = \vec{f}_{2\to1}$ et $m_2 \overrightarrow{a_2} = \vec{f}_{1\to2}$.

Le principe des actions réciproques : $\vec{f}_{2\to1} = -\vec{f}_{1\to2}$, correspond dans ce cas à la propriété : $m_1 \overrightarrow{a_1} + m_2 \overrightarrow{a_2} = (m_1+m_2)\,\vec{a}_G = \vec{0}$. Le référentiel barycentrique est alors galiléen, et il est bien approprié pour simplifier les calculs.

◊ remarque : ceci peut se généraliser aux cas où interviennent des forces extérieures, si celles-ci sont en première approximation compensées par les forces d'inertie dans le référentiel barycentrique (non galiléen dans ce cas).

• Dans le référentiel barycentrique : $\overrightarrow{GM_2} = -\frac{m_1}{m_2}\overrightarrow{GM_1}$ donc les positions ne sont pas indépendantes et le problème peut se simplifier.

Puisque la première propriété ($\vec{a}_G = \vec{0}$) a été déduite d'une combinaison des deux équations du système, une seconde propriété (indépendante) peut être obtenue par une autre combinaison, et plus logiquement par une combinaison décrivant $\overrightarrow{M_1M_2}$: $m_1m_2(\overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_1}) = (m_1+m_2)\,\vec{f}_{1\to2}$.

On appelle alors "masse réduite" la quantité $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ et on appelle "mobile relatif" le point N tel que $\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{M_1M_2}$, auquel on attribue la masse μ. L'équation différentielle du mouvement relatif s'écrit ainsi : $\mu\,\vec{a}^{\,*}_N = \vec{f}_{1\to2}$ (en caractérisant par * les quantités calculées dans le référentiel barycentrique).

◊ remarque : on pourrait aussi bien utiliser $\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{M_2M_1}$ et $\mu\,\vec{a}^{\,*}_N = \vec{f}_{2\to1}$.

1.2. Propriétés

• Le mobile relatif est représentatif de l'énergie cinétique totale E_c^* dans le référentiel barycentrique : $\overrightarrow{GM_2} = \frac{\mu}{m_2} \overrightarrow{GN}$ et $\overrightarrow{GM_1} = -\frac{\mu}{m_1} \overrightarrow{GN}$, et par suite : $E_c^* = \frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*2} = \frac{1}{2} \mu v_N^{*2}$.

• Le mobile relatif est représentatif du moment cinétique total $\vec{\sigma}_G = \vec{\sigma}_G^*$ dans le référentiel barycentrique : $\vec{\sigma}_G = \overrightarrow{GM_1} \times m_1 \overrightarrow{v_1}^* + \overrightarrow{GM_2} \times m_2 \overrightarrow{v_2}^* = \overrightarrow{GN} \times \mu \vec{v}_N^*$.

• Par contre, le mobile relatif est représentatif du mouvement relatif de M_2 par rapport à M_1, ou bien du mouvement de M_1 <u>ou</u> M_2 par rapport à G, et non du mouvement d'ensemble de M_1 et M_2 par rapport à G :

$$\mu \vec{v}_N^* = m_2 \overrightarrow{v_2}^* = -m_1 \overrightarrow{v_1}^* \quad \text{(mouvements homothétiques)},$$

mais : $m_1 \overrightarrow{v_1}^* + m_2 \overrightarrow{v_2}^* = \vec{0}$ dans le référentiel barycentrique ($\vec{p}^* = \vec{0}$).

2. Énergie potentielle

2.1. Énergie potentielle d'interaction

• L'interaction de deux points matériels M_1 et M_2, peut être décrite par leurs actions réciproques : $\vec{f}_{2\to1} = -\vec{f}_{1\to2}$.

Si la force $\vec{f}_{2\to1}$ dérive d'une énergie potentielle $E_p(M_1)$: $\vec{f}_{2\to1} = -\overrightarrow{\nabla_1} E_p(M_1)$ où $\overrightarrow{\nabla_1}$ correspond à une dérivation par rapport aux coordonnées de M_1.

Mais pour des points matériels, l'énergie potentielle de M_1 dans son interaction avec M_2 ne peut dépendre que de la distance $r = M_1M_2$, donc elle dépend aussi de M_2 : $E_p = E_p(r) = E_p(M_1, M_2)$.

Ainsi : $dE_p = \overrightarrow{\nabla_1} E_p \cdot d\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{\nabla_2} E_p \cdot d\overrightarrow{OM_2} = -\vec{f}_{2\to1} \cdot d\overrightarrow{OM_1} - \vec{f}_{1\to2} \cdot d\overrightarrow{OM_2}$ et cette énergie potentielle, qui décrit les travaux des deux forces réciproques, est donc l'énergie potentielle d'interaction de l'ensemble des deux points.

En outre : $\overrightarrow{\nabla_2} r = \dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{r} = -\overrightarrow{\nabla_1} r$, donc le principe des actions réciproques est vérifié : $\vec{f}_{1\to2} = -\overrightarrow{\nabla_2} E_p = -\dfrac{dE_p}{dr} \overrightarrow{\nabla_2} r = \dfrac{dE_p}{dr} \overrightarrow{\nabla_1} r = \overrightarrow{\nabla_1} E_p = -\vec{f}_{2\to1}$.

Enfin, le mobile relatif est représentatif de l'énergie potentielle d'interaction (par rapport à G), car E_p ne dépend que de $r = M_1M_2 = GN$, donc on peut écrire : $dE_p = \overrightarrow{\nabla_N} E_p \cdot d\overrightarrow{GN}$.

2.2. "Énergie potentielle radiale"

• Si les forces d'interaction dérivent d'une énergie potentielle $E_p = E_p(r)$, avec $r = M_1M_2 = GN$, alors l'énergie mécanique $E_m = \dfrac{1}{2} \mu v^2 + E_p$ (dans le référentiel barycentrique) est constante.

Or le point N a une accélération centrale, avec $\vec{\sigma}_G = \mu r^2 \dot{\theta} \, \overrightarrow{u_z}$ constant : mouvement selon la "loi des aires" dans le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{u_z}$.

Dans le plan du mouvement : $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + \dfrac{\sigma^2}{\mu^2 r^2}$ (avec $\sigma = \mu r^2 \dot{\theta}$),

et on peut obtenir une expression de r seul : $E_m = \dfrac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \dfrac{\sigma^2}{2\mu r^2} + E_p(r)$.

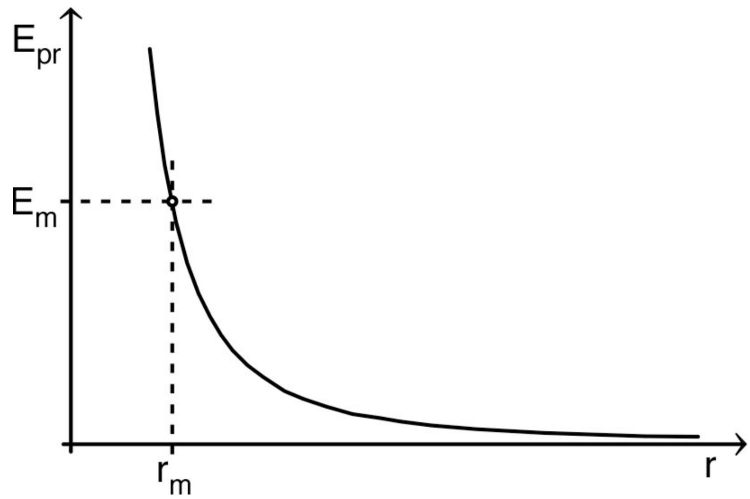
En définissant alors une "énergie potentielle radiale" : $E_{pr}(r) = E_p(r) + \dfrac{\sigma^2}{2\mu r^2}$ (dont le second terme décrit l'effet "centrifuge" associé aux rotations de $\overrightarrow{u_r}$ autour de G), on obtient finalement : $E_m = \dfrac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + E_{pr}(r)$.

• Pour un point N isolé (dont le mouvement est rectiligne uniforme) :

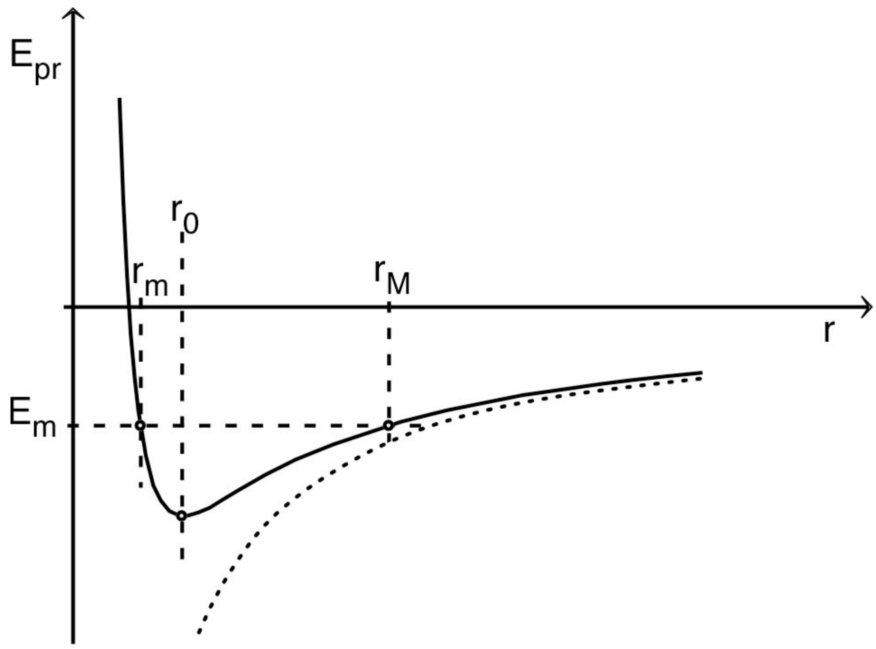
$$E_m = \frac{1}{2}\,\mu r^{\bullet 2} + \frac{\sigma^2}{2\mu r^2}.$$

On en déduit l'existence d'une distance minimale d'approche (distance entre l'origine et la trajectoire, obtenue pour $r^{\bullet} = 0$) :

$$r_m = \frac{\sigma}{\sqrt{2\mu E_m}}.$$



• Pour un point N soumis à une force attractive en $-\frac{K}{r^2}$ et dont le moment cinétique est non nul, on obtient : $E_m = \frac{1}{2}\,\mu r^{\bullet 2} - \frac{K}{r} + \frac{\sigma^2}{2\mu r^2}$ d'où on déduit l'existence de mouvements "confinés" (pour $E_m < 0$) avec une distance minimale r_m et une distance maximale r_M :



Le cas particulier du mouvement circulaire de rayon $r_0 = \dfrac{\sigma^2}{K\mu}$ correspond à l'équilibre relatif, dans le référentiel tournant, avec $\dfrac{dE_{pr}}{dr} = 0$.

◊ remarque : il est toujours possible de résoudre (au moins numériquement, car ces intégrales sont rarement simples) :

◊ le mouvement radial sous la forme : $t - t_0 = \pm\sqrt{\dfrac{\mu}{2}} \displaystyle\int \dfrac{dr}{\sqrt{E_m - E_{pr}}}$;

◊ la trajectoire sous la forme : $\theta - \theta_0 = \pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{2\mu}} \displaystyle\int \dfrac{dr}{r^2\sqrt{E_m - E_{pr}}}$.

3. Mouvements des satellites

• On prend l'origine au centre d'inertie G pour étudier le mouvement de M_1 et M_2 au moyen d'un “mobile relatif” N, et on considère l'interaction :

$$\vec{f}_{G\to N} = \vec{f}_{1\to 2} = -\mathcal{G}\frac{Mm}{r^2}\,\vec{u}_r = -\mathcal{G}\frac{(M+m)\mu}{r^2}\,\vec{u}_r = \mu\,\vec{a}^{\,*}_N.$$

Étudiés par rapport à G, les mouvements ont donc la même forme que celle donnée par l'approximation du corps attracteur très massif : il suffit de remplacer $M \to M+m$ et $m \to \mu$ pour obtenir le mouvement de N, puis les mouvements de M_1 et M_2 s'en déduisent par homothétie.

En particulier la troisième loi de Kepler s'écrit : $\dfrac{a^3}{T^2} = \dfrac{\mathcal{G}.(M+m)}{4\pi^2}$.

🕮 *exercice n° I.*

4. Notions élémentaires sur les chocs

• Dans le cas général où on ne connaît pas la loi de force d'interaction, on peut se limiter à relier les limites “longtemps avant” et “longtemps après” le choc (en comparaison de sa durée).

En particulier, pour un système isolé, il y a toujours conservation de la quantité de mouvement totale : $\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p'_1} + \overrightarrow{p'_2}$ (où les “primes” désignent ici les quantités après le choc, dans le même référentiel).

La conservation de l’énergie totale peut aussi être utilisée ; en particulier pour les chocs “élastiques” (où aucune partie du système ne change d’énergie “interne”) il y a conservation de l'énergie cinétique : $E_{c1} + E_{c2} = E'_{c1} + E'_{c2}$.

◊ remarque : les chocs inélastiques peuvent être étudiés “plus facilement” en mécanique relativiste, dans la mesure où les modifications “internes” des particules peuvent être décrites par des énergies potentielles d'interaction incluses dans les énergies de masse au repos (la variation des énergies de masse donne la variation des énergies cinétiques).

• Ces deux lois ne permettent pas de déterminer complètement le mouvement limite après le choc ; en particulier elles ne donnent pas la répartition angulaire de $\theta = (\overrightarrow{p_1} ; \overrightarrow{p'_1})$. Le complément d’information dépend du moment cinétique total et de la loi de force d’interaction.