DYNAMIQUE - INTERACTION DE DEUX POINTS - corrigé des exercices

A. EXERCICE DE BASE

I. Masses des étoiles doubles

• Le “mobile relatif” représentatif du système a un mouvement régi par l’équation : $\mu \vec{a} = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u_r}$ avec la masse réduite : $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

• Pour une planète de masse m soumise à l’attraction d’une étoile de masse $M \gg m$, la loi correspondante est : $m\vec{a} = -\mathcal{G}\frac{M m}{r^2}\vec{u_r}$ et elle aboutit à ce que le rayon R (en fait, le demi-grand-axe) et la période (T) sont liés par la relation : $\frac{R^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M}{4\pi^2}$ (troisième loi de Kepler).

• Or, le terme $\mathcal{G}M = r^2 \left\|\vec{a}\right\|$ devient pour le mobile relatif : $r^2 \left\|\vec{a}^{\,*}_N\right\| = \mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{\mu} = \mathcal{G}.(m_1 + m_2)$. On obtient donc par cette analogie : $\frac{\ell^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}.(m_1+m_2)}{4\pi^2}$ d’où on déduit : $m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2\ell^3}{\mathcal{G}T^2} = 8{,}8.10^{30}$ kg.

• Puisque les mouvements par rapport au centre d’inertie sont dans le rapport inverse des masses : $\frac{\ell_2}{\ell_1} = \frac{m_1}{m_2} = x = 4$. On en tire : $m_2 = \frac{m_1+m_2}{1+x} = 1{,}76.10^{30}$ kg et $m_1 = x\, m_2 = 7{,}0.10^{30}$ kg.

B. EXERCICES D’APPROFONDISSEMENT

II. Transfert d'énergie cinétique dans un choc élastique "frontal"

1. • Le choc frontal peut être décrit algébriquement le long de l'axe du mouvement. On note v” la vitesse du noyau après le choc.

• On peut utiliser la conservation de l’impulsion pour l'ensemble isolé : $mV = mV' + k\, mv''$.

• Puisque le choc est élastique, on peut de plus utiliser la conservation de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}mV'^2 + \frac{1}{2}k\, mv''^2.$$

• Le système formé de ces deux équations peut s’écrire : $V^2 - V'^2 = k\, v''^2$ et $V - V' = k\, v''$ ce qui équivaut à : $V + V' = v''$ et $V - V' = k\, v''$; ceci aboutit à : $V' = V\frac{1-k}{1+k}$.

◊ remarque : pour $k = 1$, le neutron s'arrête sous l'effet du choc ; pour $k > 1$, il repart en arrière...

• Finalement l'énergie cinétique du neutron après le choc est : $E' = \frac{1}{2}mV'^2 = E.\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2$.

2. • Pour n chocs successifs, l'énergie cinétique finale du neutron est : $E'_n = E.\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{2n}$ ou bien inversement : $n = \frac{\ln\left(\frac{E'_n}{E}\right)}{2\ln\left(\frac{k-1}{k+1}\right)}$.

◊ remarque : c'est contradictoire de considérer une succession de chocs frontaux puisque le neutron se déplaçant sur une droite ne peut pas entrer en collision avec plusieurs noyaux alignés : ou bien il s'arrête au premier choc si $k = 1$, ou bien il rebrousse chemin à chaque choc et ne peut qu'entrer en collision avec toujours les deux mêmes (qui l'entourent) mais qui ne sont plus immobiles dès qu'ils ont subi un premier choc ; en fait ce modèle est simplifié, mais il décrit en bonne approximation ce qui peut se produire pour une suite de chocs “à peu près” frontaux.

• Avec $E = 1{,}0.10^6$ eV et $E'_n = 0{,}025$ eV, on obtient respectivement :

a) pour des neutrons ($k = 1$) : le transfert est forcément total et $E'_1 = 0$, donc $E' = 0{,}025$ eV ne peut être obtenu que par un choc non frontal.

b) pour des noyaux d'atomes de deutérium ($k = 2$) : $n \approx 8$.

c) pour des noyaux d'atomes de carbone ($k = 12$) : $n \approx 52$.

◊ remarque : le transfert est d'autant plus progressif que les masses sont différentes ; cela peut être utilisé pour ajuster l'énergie cinétique : c'est le cas du ralentissement des neutrons rapides dans les réacteurs nucléaires, nécessaire pour optimiser la section efficace d'interaction avec l'uranium (cette section efficace dépend de l'énergie cinétique des neutrons).

III. Choc inélastique et perte d'énergie cinétique

• Si on utilise les propriétés générales du point “mobile relatif” N, affecté de la masse réduite μ, alors l'énergie cinétique du système dans le référentiel du centre de masse est avant le choc: $E_c = \frac{1}{2}\mu\, v_N^2$.

• On peut aussi en refaire une démonstration dans le cas particulier étudié. Puisque la quantité de mouvement totale dans ce référentiel est nulle, les vecteurs quantité de mouvement incidents sont opposés et on a algébriquement : $m_1 v_1 = - m_2 v_2$ et $v_N = v_2 - v_1 = - v_1.(1 + \frac{m_1}{m_2})$. Donc il y a initialement :

$$E_c = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2.(1 + \frac{m_1}{m_2}) = \frac{\frac{1}{2}m_1 v_M^2}{1+\frac{m_1}{m_2}} = \frac{1}{2}\,\mu\, v_N^2.$$

• Or l’impulsion totale dans ce référentiel est nulle et donc l'énergie cinétique finale est nulle. Par suite la variation d'énergie cinétique est : $\Delta E_c = 0 - E_c = -\frac{1}{2}\mu\, v_N^2 = -\frac{1}{2}\mu.(v_2 - v_1)^2$.

◊ remarque : ceci n'est pas indépendant du théorème de Koenigs sur l'énergie cinétique.