# M. XI - DYNAMIQUE ; PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

## 1. Coordonnées généralisées

• Pour décrire un point matériel, ou un système de N points matériels, on peut utiliser un système de k coordonnées “quelconques” $\{q_i\}$ (non nécessairement cartésiennes) avec $k = 3N$ si les mouvements des N points ne sont pas restreints par des contraintes.

L'expérience montre que la connaissance des coordonnées $\{q_i\}$ et des “vitesses” correspondantes $\{q_i^\bullet\}$ à un instant “initial” donné permet généralement d'obtenir les expressions des $\{q_i^{\bullet\bullet}\}$ (équations du mouvement) puis en principe d'en déduire le mouvement du système.

## 2. Principe de Hamilton et lagrangien

• Le principe de Hamilton suppose que tout système mécanique peut être caractérisé par une fonction “lagrangien” $\mathcal{L}(\{q_i\}, \{q_i^\bullet\}, t)$.

Pour simplifier l'écriture, on écrira souvent $\mathcal{L}(q, q^\bullet, t)$ en sous-entendant les sommations sur les différents termes correspondants.

• En considérant qu'à deux instants $t_1$ et $t_2$ les positions du système correspondent à $q(t_1)$ et $q(t_2)$ données, alors on peut définir la quantité “action” (de Hamilton) : $\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q, q^\bullet, t\right) dt$.

◊ remarque : ici q et $q^\bullet$ représentent des fonctions $q(t)$ et $q^\bullet(t)$ cherchées.

• Le principe de Hamilton (principe de moindre action) suppose que le mouvement entre les positions $q(t_1)$ et $q(t_2)$ est tel que l'action soit minimum (ou au moins extremum) : $\delta\mathcal{S} = 0$.

• Pour des points matériels très éloignés, les mouvements sont indépendants ; le lagrangien du système est simplement la somme des lagrangiens de chaque point (ainsi les variations de chacun en fonctions des coordonnées des autres points sont nulles).

Par ailleurs, on peut montrer que l'ajout au lagrangien de la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction $f(q, t)$ arbitraire est sans effet (ceci permet des simplifications).

📖 *exercice n° I.*

## 3. Équations du mouvement

• Pour une variation $\delta q(t)$ du mouvement étudié, induisant une variation $\delta q^{\bullet}(t)$, le calcul de la variation donne (sans terme en $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$ puisqu'on fait varier q et $q^{\bullet}$ pour chaque t puis qu'on intègre sur t) :

$$\delta \mathcal{S} = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q, q^{\bullet}, t\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{\bullet}} \delta q^{\bullet} \right) dt .$$

Puisque $\delta(q^{\bullet}) = (\delta q)^{\bullet}$ l'intégration par parties donne :

$$\delta \mathcal{S} = \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{\bullet}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{\bullet}} \right)^{\bullet} \right) \delta q \, dt .$$

Puisque $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ la condition $\delta \mathcal{S} = 0$ impose les équations (d'Euler-Lagrange) décrivant le mouvement : $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i^{\bullet}} \right)^{\bullet} = 0.$

## 4. Point matériel isolé

• L'expérience montre qu'en l'absence d'interactions l'espace semble homogène et indépendant du temps, pourvu qu'on raisonne par rapport à un référentiel “galiléen”, donc le lagrangien d'un point matériel M isolé ne dépend que de sa vitesse.

En outre l'espace semble isotrope, donc ce lagrangien de dépend que de la norme de la vitesse ; on peut noter $\mathcal{L} = \mathcal{L}(v^2)$.

• L'expérience montre que la mécanique semble invariante par changement de référentiel galiléen, en particulier pour un changement infinitésimal :

$$\vec{v} \rightarrow \vec{v}' = \vec{v} + \overrightarrow{\delta v_e} \quad ;$$

$$\mathcal{L}(v^2) \rightarrow \mathcal{L}(v'^2) \approx \mathcal{L}(v^2) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^2}\, 2\,\vec{v} \cdot \overrightarrow{\delta v_e}\ .$$

Pour que les lois soient inchangées, il faut et il suffit que le terme supplémentaire soit la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction f(M, t). C'est le cas pour la fonction $\vec{v} \cdot \overrightarrow{\delta v_e}$ mais $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^2}$ n'est pas une fonction de M, donc le terme $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^2}\, 2\,\vec{v} \cdot \overrightarrow{\delta v_e}$ est acceptable si et seulement si $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^2} = \text{Cste}$.

On peut donc considérer : $\mathcal{L} = \frac{m}{2} v^2$, où la constante $\frac{m}{2}$ est une caractéristique du point matériel étudié.

On peut alors vérifier que ce lagrangien est plus généralement “invariant” pour tout changement de référentiel galiléen.

• Dans ce cas on obtient $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$ donc les équations du mouvement donnent : $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \text{Cste}$ ; ceci correspond à $\vec{v} = \overrightarrow{\text{Cste}}$ (loi de l'inertie).

📖 *exercice n° II.*

## 5. Système de points matériels

• Pour un système de points matériels en interaction, on peut écrire le lagrangien comme la somme des termes associés aux points et d'un terme décrivant l'interaction : $\mathcal{L} = \sum \left( \frac{m_n}{2} v_n^2 \right) - U(\{M_n\})$

Les équations du mouvement $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i^{\bullet}} \right)^{\bullet} = 0$ conduisent à la loi de Newton : $m_n \ \overrightarrow{a_n} = - \overrightarrow{\nabla_n} U$.

◊ remarque : le lagrangien correspond à $\mathcal{L} = E_c - E_p$.

• Ceci permet de généraliser au cas d'un point matériel M en interaction avec un “champ extérieur”, forcément causé par d'autres points matériels dont l'effet est décrit globalement.

Dans ce cas les autres points ne contribuent pas à l'expression de $E_c$ car on les étudie pas, ni à l'expression de $E_p$ : on suppose donné globalement le champ extérieur par l'intermédiaire de U.

Par contre, ce terme peut dépendre du temps à cause des mouvements des autres points : $\mathcal{L} = \frac{m}{2} v^2 - U(M, t)$.

📖 *exercices n° III et IV.*

## 6. Lois de conservation

• Pour un système de 2k équations, la résolution fait intervenir 2k constantes d'intégration $\{C_j\}$ : $q_i = q_i(t, \{Cj\})$ ; $q_i^{\bullet} = q_i^{\bullet}(t, \{C_j\})$.

L'inversion de ce système d'équations fait apparaitre 2k - 1 constantes du mouvement (il reste un arbitraire de l'origine du temps) : $C_j = C_j(\{q_i\}, \{q_i^{\bullet}\})$.

• Une constante du mouvement très générale découle du fait que, pour un système fermé ou dans un champ extérieur constant, le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps ; ainsi (en notations simplifiées) :

$$\mathcal{L}^{\bullet} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} q^{\bullet} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^{\bullet}} q^{\bullet\bullet} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^{\bullet}}\right)^{\bullet} q^{\bullet} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^{\bullet}} q^{\bullet\bullet} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^{\bullet}} q^{\bullet}\right)^{\bullet} \;;$$

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^{\bullet}} q^{\bullet} - \mathcal{L}\right)^{\bullet} = 0.$$

• Pour tout système dont le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps, ceci correspond à une énergie constante : $E = \sum\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i^{\bullet}} q_i^{\bullet}\right) - \mathcal{L} = \text{Cste}$.

L'énergie est une expression linéaire du lagrangien, donc est additive dans les mêmes conditions.

◊ remarque : d'après l'expression de $\mathcal{L}$, cette énergie est $E = E_c + E_p$.

• D'autres constantes du mouvement très générales découlent du fait que, pour un système fermé, le lagrangien est invariant par translation ; ainsi (en coordonnées cartésiennes) :

$\delta x_{i(n)} = \delta x_i$ (même déplacement pour tous les points) ;

$$\delta\mathcal{L} = \sum_n \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_{i(n)}} \delta x_{i(n)}\right) = \delta x_i \sum_n \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_{i(n)}}\right) = 0 \;;$$

$$\sum_n \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_{i(n)}}\right) = \sum_n \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^{\bullet}_{i(n)}}\right)^{\bullet} = 0.$$

• Pour tout système dont le lagrangien est invariant par translation, ceci correspond à un vecteur impulsion constant : $p_i = \sum_n \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^{\bullet}_{i(n)}}\right) = \text{Cste}$.

On peut de même associer une impulsion généralisée $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^{\bullet}}$ constante pour toute coordonnée q dont le lagrangien ne dépend pas explicitement.

◊ remarque : si les variables utilisées pour exprimer le lagrangien sont les coordonnées des points, on obtient $\vec{p} = \sum \left(m_n \overrightarrow{v_n}\right)$.

• D'autres constantes du mouvement très générales découlent du fait que, pour un système fermé, le lagrangien est invariant par rotation. En notant $\overrightarrow{\delta\varphi}$ une rotation infinitésimale :

$$\delta \overrightarrow{OM_n} = \overrightarrow{\delta\varphi} \times \overrightarrow{OM_n} \quad ; \quad \delta \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{\delta\varphi} \times \overrightarrow{v_n} \quad ;$$

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{n,i} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_{i(n)}} \delta x_{i(n)} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{i(n)}} \delta \dot{x}_{i(n)} \right) = 0 \quad ;$$

$$\sum_n \left( \dot{\overrightarrow{p_n}} \cdot \overrightarrow{\delta\varphi} \times \overrightarrow{OM_n} + \overrightarrow{p_n} \cdot \overrightarrow{\delta\varphi} \times \overrightarrow{v_n} \right) = \overrightarrow{\delta\varphi} \cdot \sum_n \left( \overrightarrow{OM_n} \times \dot{\overrightarrow{p_n}} + \overrightarrow{v_n} \times \overrightarrow{p_n} \right) = 0 \quad ;$$

$$\sum \left( \overrightarrow{OM_n} \times \overrightarrow{p_n} \right)^{\bullet} = 0.$$

• Pour tout système dont le lagrangien est invariant par rotation, ceci correspond à un vecteur moment cinétique constant : $\vec{\sigma} = \sum \left( \overrightarrow{OM_n} \times \overrightarrow{p_n} \right) = \text{Cste}$.

## 7. Équations de Hamilton

• L'obtention des équations d'Euler-Lagrange décrivant le mouvement à l'aide d'un lagrangien n'est pas la seule méthode. On peut considérer :

$$d\mathcal{L} = \sum \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} dt \quad ;$$

$$p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ \text{(définition)} \ ; \ \dot{p}_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} \ \text{(équations du mouvement)} \ ;$$

$$d\mathcal{L} = \sum \left( \dot{p}_i \, dq_i + p_i \, d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} dt \, .$$

• On peut alors définir le hamiltonien, pour lequel les variables sont les coordonnées et les impulsions (et le temps) : $\mathcal{H}(q, p, t) = \sum \left( p_i \dot{q}_i \right) - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$.

Par exemple pour un point matériel dans un champ extérieur :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\, p^2 + U(M, t).$$

• Ceci donne : $d\mathcal{H} = \sum\left(q_i^{\bullet}\, dp_i - p_i^{\bullet}\, dq_i\right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt$ ; on en déduit les équations du mouvement sous la forme de 2k équations du premier ordre (au lieu de k équations du second ordre) : $q_i^{\bullet} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$ ; $p_i^{\bullet} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$ .

On remarque alors que $\mathcal{H}^{\bullet} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$, c'est-à-dire que si le hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, il représente une quantité constante du mouvement : l'énergie.

## 8. Principe de moindre action et hamiltonien

• Pour une variation $\delta q(t)$ du mouvement étudié, induisant une variation $\delta p(t)$, le calcul de la variation de l'action donne (sans terme en $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$ puisqu'on fait varier q et p pour chaque t puis qu'on intègre sur t) :

$$\delta\mathcal{S} = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(p\, q^{\bullet} - \mathcal{H}(q, p, t)\right) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(p\, dq - \mathcal{H}(q, p, t)\, dt\right) \;;$$

$$\delta\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta p\, dq + p\, \delta q^{\bullet}\, dt\right) - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \delta p\right) dt \;;$$

Puisque $\delta(q^{\bullet}) = (\delta q)^{\bullet}$ l'intégration par parties donne :

$$\delta\mathcal{S} = \left[p\, \delta q\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta p\, dq - \delta q\, dp\right) - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \delta p\right) dt \;;$$

$$\delta\mathcal{S} = \left[p\, \delta q\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \delta p . \left(dq - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} dt\right) - \int_{t_1}^{t_2} \delta q . \left(dp + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} dt\right).$$

Puisque $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ la condition $\delta\mathcal{S} = 0$ impose les équations (de Hamilton) décrivant le mouvement : $q_i^{\bullet} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$ ; $p_i^{\bullet} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$ .