DYNAMIQUE - PRINCIPE DE MOINDRE ACTION - corrigé des exercices

I. Définition d'un lagrangien

• La modification du lagrangien $\underline{\mathcal{L}}(q, q^\bullet, t) = \mathcal{L}(q, q^\bullet, t) + (\,f(q(t), t)\,)^\bullet$ correspond à :

$$\underline{\mathcal{S}} = \mathcal{S} + \Big[\,f\big(q(t),t\big)\Big]_{t_1}^{t_2} = \mathcal{S} + \text{Cste}.$$

• On en déduit $\delta\underline{\mathcal{S}} = \delta\mathcal{S}$; ainsi les équations du mouvement qui s'en déduisent sont les mêmes.

II. Changement de référentiel galiléen

• Un changement de référentiel galiléen correspond à :

$$\vec{v} \to \vec{v}' = \vec{v} + \overrightarrow{v_e} \;;$$

$$\mathcal{L}(v^2) = \frac{m}{2} v^2 \;\to\; \mathcal{L}(v'^2) = \frac{m}{2} v^2 + \frac{m}{2}.(2\,\vec{v}\cdot\overrightarrow{v_e} + v_e^2).$$

• Puisque $(2\,\vec{v}\cdot\overrightarrow{v_e} + v_e^2) = (2\,\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{v_e} + v_e^2\,t)^\bullet$, dérivée totale d'une fonction $f(M, t)$, le lagrangien ainsi obtenu est équivalent.

III. Expression du lagrangien

1. • Les équations du mouvement $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} - \left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i^\bullet}\right)^\bullet = 0$ sont visiblement inchangées si on multiplie le lagrangien par une constante arbitraire. Cela équivaut en fait à un changement d'unité de mesure (le lagrangien a une unité d'énergie).

2. • Une multiplication arbitraire de chaque terme par une constante différente revient à changer les définitions respectives des coordonnées de chaque point. Dans le cas général, cela implique de modifier l'expression du terme d'interaction U, où les différentes coordonnées interviennent en même temps.

IV. Système de points matériels

1. • L'énergie cinétique de M_1 est négligeable ; celle de M_2 est : $m\,x_2^{\bullet 2}$.

• Les coordonnées de M_3 sont : $x_3 = x_1 + L\sin(\theta)$; $z_3 = -L\cos(\theta)$. Les coordonnées de sa vitesse sont donc : $x_3^\bullet = x_1^\bullet + L\cos(\theta)\,\theta^\bullet$; $z_3^\bullet = L\sin(\theta)\,\theta^\bullet$.

• L'énergie cinétique de M_3 est ainsi : $\dfrac{m}{2}(x_3^{\bullet 2} + z_3^{\bullet 2}) = \dfrac{m}{2}(x_1^{\bullet 2} + L^2\,\theta^{\bullet 2} + 2L\cos(\theta)\,x_1^\bullet\,\theta^\bullet)$.

◊ remarque : dès lors que M_3 n'est pas directement repéré par ses coordonnées, l'expression de son énergie cinétique peut dépendre des coordonnées des autres points.

2.a. • L'énergie potentielle des ressorts est : $\dfrac{k}{2}(x_1 - \ell_0)^2 + \dfrac{k}{2}(x_2 - x_1 - \ell_0)^2$.

• L'énergie potentielle de pesanteur est : $mg\,z_3 = -mgL\cos(\theta)$.

• Le lagrangien peut donc s'écrire :

$$\mathcal{L} = m\,x_2^{\bullet 2} + \frac{m}{2}(x_1^{\bullet 2} + L^2\,\theta^{\bullet 2} + 2L\cos(\theta)\,x_1^\bullet\,\theta^\bullet) - \frac{k}{2}(x_1 - \ell_0)^2 - \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - \ell_0)^2 + mgL\cos(\theta).$$

2.b. • Les équations du mouvement $\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)^{\bullet} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$ peuvent s'écrire :

$m.(\ddot{x}_1 + L\cos(\theta)\,\ddot{\theta} - L\sin(\theta)\,\dot{\theta}^2) = -k.(x_1 - \ell_0) + k.(x_2 - x_1 - \ell_0)$;
$2m\,\ddot{x}_2 = -k.(x_2 - x_1 - \ell_0)$;
$m.(L^2\,\ddot{\theta} + L\cos(\theta)\,\ddot{x}_1 - L\sin(\theta)\,\dot{x}_1\,\dot{\theta}) = -mgL\sin(\theta)$.

3.a. • Les conditions d'équilibre peuvent s'écrire :
$0 = -k.(x_1 - \ell_0) + k.(x_2 - x_1 - \ell_0)$; $0 = -k.(x_2 - x_1 - \ell_0)$; $0 = -mgL\sin(\theta)$.
• On en déduit : $x_{1e} = \ell_0$; $x_{2e} = 2\ell_0$; $\theta_e = 0$.

3.b. • Pour les petites oscillations au voisinage de l'équilibre, on peut considérer :
$x_1 = \ell_0 + X_1\cos(\omega t)$; $x_2 = 2\ell_0 + X_2\cos(\omega t)$; $\theta = \Theta\cos(\omega t)$.
• En ne conservant que les termes au premier ordre, les équations des petits mouvements peuvent s'écrire (on peut simplifier en posant : $K = \frac{k}{m\omega^2}$; $G = \frac{g}{L\omega^2}$; $Y = L\,\Theta$) :
$X_1 + Y = K.(2X_1 - X_2)$; $2X_2 = K.(X_2 - X_1)$; $X_1 + Y = G\,Y$.
• On en déduit que des solutions sont possibles avec :
$X_2 = \frac{K}{K-2}\,X_1$; $Y = \frac{1}{G-1}\,X_1$; $\frac{G}{G-1} = \frac{K.(K-4)}{K-2}$.
• Ceci signifie que les modes propres correspondent pour les trois points à des amplitudes respectives non indépendantes (proportionnelles dans la limite des petits mouvements).
• Mais surtout cela montre que ces modes propres n'existent que si les fréquences propres des différentes parties respectent une relation bien précise (dans le cas général le mouvement est chaotique).
• Par exemple pour : $K = 1$; $\omega = \Omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $G = \frac{3}{2}$; $\omega = \Omega_2\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2g}{3L}}$. Dans ces conditions : $X_2 = -X_1$ (opposition de phase ; le centre du second ressort est immobile) ; $Y = 2X_1$ (en phase ; le déplacement du pendule est le double de celui de son point de fixation ; oscillation “forcée” par les ressorts). Mais un tel mode propre n'est possible que si : $\frac{k}{m} = \frac{2g}{3L}$; par exemple en choisissant un longueur $L = \frac{2mg}{3k}$.
• Inversement, on peut considérer une égalité des fréquences propres $\Omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \Omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L}}$. Dans ces conditions : $G = K = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} \neq 1$ (donc $\omega \neq \Omega_1 = \Omega_2$) ;
◊ pour $G = K = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}37$ les trois mouvements sont en phase : $\frac{X_2}{X_1} = \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}-1} \approx 6{,}46$; $\frac{Y}{X_1} = \frac{2}{1+\sqrt{3}} \approx 0{,}732$ (le plus petit) ;
◊ pour $G = K = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}634$ les deux ressorts sont en opposition de phase, mais le pendule est ici en phase avec le second ressort : $\frac{X_2}{X_1} = -\frac{3-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \approx -0{,}464$ (le plus petit) ; $\frac{Y}{X_1} = -\frac{2}{\sqrt{3}-1} \approx -2{,}73$.