

DYNAMIQUE - PRINCIPE DE MOINDRE ACTION - exercices

I. Définition d'un lagrangien

- On suppose qu'on modifie le lagrangien $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ d'un système en lui ajoutant la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction $f(q, t)$ arbitraire.
- Déterminer la modification que cela provoque pour l'action et en déduire que cela n'a aucun effet sur l'étude du mouvement.

II. Changement de référentiel galiléen

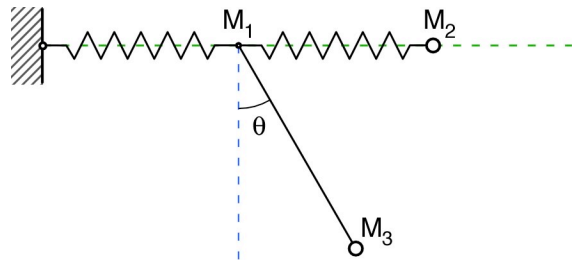
- Montrer que le lagrangien d'un point matériel isolé est "invariant" par changement de référentiel galiléen.

III. Expression du lagrangien

- On considère un système de points matériels.
1. • Les équations du mouvement sont-elles modifiées si on multiplie le lagrangien par une constante arbitraire ?
 2. • Est-il possible de multiplier chaque terme du lagrangien par une constante arbitraire différente ?

IV. Système de points matériels

- On considère un système de trois points matériels de masses : $m_1 \approx 0$; $m_2 = 2m$; $m_3 = m$.
- Les points M_1 et M_2 glissent sans frottement sur un rail horizontal et interagissent avec deux ressorts identiques de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . On repère ces points par leur abscisses x_1 et x_2 .
- Le point M_3 est suspendu en M_1 par une tige de masse négligeable et de longueur L . On repère ce point par l'angle θ de la tige par rapport à la verticale.



1. • Exprimer l'énergie cinétique des trois points.
2. a) Exprimer le lagrangien du système.
b) En déduire les équations du mouvement.
3. a) Déterminer la position d'équilibre du système.
b) En se limitant à des petits mouvements au voisinage de l'équilibre (on peut généraliser en utilisant des séries de Fourier), déterminer les "modes propres" envisageables et les conditions requises pour cela.