DYNAMIQUE - POUSSÉE D'ARCHIMÈDE - corrigé des exercices

A. EXERCICES DE BASE

B. EXERCICE D'APPROFONDISSEMENT

I. Étude d'une montgolfière

1. • En supposant la température intérieure uniforme $T' > T$ (grossière approximation à la base de la montgolfière) et en supposant les variations de pression faibles, les pressions varient selon :

$$p(z) = p_0 \, \mathrm{e}^{-Mgz/RT} \approx p_0 \, . \left(1 - \frac{M\,g}{R\,T}\,z\right) \; ; \; p'(z) \approx p_0 \, . \left(1 - \frac{M\,g}{R\,T'}\,z\right) \geq p(z) \, .$$

◊ remarque : aux températures “usuelles” $H \overset{\text{def}}{=} \frac{R\,T}{M\,g} \approx 10 \text{ km} \gg z \approx r$.

• La surpression intérieure maintient “gonflée” la toile de la montgolfière et exerce sur la partie supérieure une force globale permettant la sustentation.

2. • Pour éviter de faire un bilan des forces en calculant des intégrales (qui de toute façon ne donnent qu'une approximation, faute de connaitre la forme exacte et la répartition des températures), on peut estimer la condition d'équilibre en calculant les masses volumiques d'après les pressions moyennes à mi-hauteur : $p \approx p_0 \, . \left(1 - \frac{M\,g}{R\,T}\,r\right)$; $p' \approx p_0 \, . \left(1 - \frac{M\,g}{R\,T'}\,r\right)$.

◊ remarque : selon le théorème du gradient $\iiint p \, d\vec{S} = \iiint \vec{\nabla} p \, dV$ avec $\vec{\nabla} p = \rho \, \vec{g}$, il peut sembler suffisant de connaître la masse totale de l'air intérieur, à comparer à un volume équivalent de l'air extérieur ; mais $\iiint \rho \, dV$ fait une moyenne des différentes valeurs de ρ aux différentes altitudes, pondérée par la surface de coupe horizontale à chaque altitude, donc les masses dépendent de la forme ; en outre, pour une enveloppe (souple) de montgolfière donnée, le volume intérieur total lui même dépend aussi de la forme.

• On en déduit la masse volumique (moyenne) de l'air extérieur : $\rho \approx \frac{p\,M}{R\,T} \approx \frac{p_0\,M}{R\,T} \approx 1{,}21 \text{ kg.m}^{-3}$; puis, pour un volume $V \approx \frac{4}{3}\pi\,r^3$, la masse d'air déplacé : $m = \rho\,V \approx 3700 \text{ kg}$.

• Pour que la poussée d'Archimède équilibre le poids de la montgolfière et de l'air intérieur, il faut que la masse de ce dernier soit : $m' = m - m_m \approx 2900 \text{ kg}$.

• La masse volumique (moyenne) de l'air intérieur est ainsi : $\rho' \approx \frac{m'}{V} \approx 0{,}95 \text{ kg.m}^{-3}$; sa température (moyenne) est donc : $T' \approx \frac{p'\,M}{\rho'\,R} \approx \frac{p_0\,M}{\rho'\,R} \approx 367 \text{ K} \cong 94 \text{ °C}$.

3. • Il peut sembler contradictoire de négliger les différences de pression, alors qu'elles sont à l'origine de la poussée d'Archimède, mais elles interviennent au premier ordre pour le calcul de cette dernière, alors qu'elles sont au second ordre pour le calcul de la température.

• L'apparente contradiction vient du fait qu'on prend rarement conscience de l'énormité des forces pressantes atmosphériques : avec $p_0 \approx 10^5 \text{ Pa}$, une variation relative $\frac{r}{H} \approx 10^{-3}$ (qui parait très faible) correspond à $\Delta p \approx 100 \text{ Pa}$. Or, sur une surface $S \approx \pi\,r^2 \approx 250 \text{ m}^2$ (en projection horizontale), cela donne une force résultante $\Delta p\,S \approx 25000 \text{ N}$; on retrouve (ici grossièrement) l'ordre de grandeur des poids mis en jeu.