DYNAMIQUE - COMPLÉMENTS SUR LES CHOCS - corrigé des exercices

I. Choc élastique et détermination de la masse du neutron

1. • La conservation de la quantité de mouvement peut s'écrire : $m_1\vec{v_1} = m_1\vec{v'_1} + m_2\vec{v'_2}$ d'où on tire, par projection sur les axes : $m_1v_1 = m_1v'_1 \cos(\theta_1) + m_2v'_2 \cos(\theta_2)$ et $0 = m_1v'_1 \sin(\theta_1) + m_2v'_2 \sin(\theta_2)$.

• La conservation de l'énergie cinétique peut s'écrire : $\frac{1}{2}m_1{v_1}^2 = \frac{1}{2}m_1{v'_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v'_2}^2$.

• Ceci fournit donc trois équations, qui permettent de calculer trois quantités (par exemple v'_1, v'_2 et θ_2) en fonction des autres.

2.a. • Dans le cas où $\theta_1 = 0$, on obtient le système d'équations simplifié :

$$m_1v_1 = m_1v'_1 + m_2v'_2 \cos(\theta_2) \quad \text{et} \quad 0 = m_2v'_2 \sin(\theta_2) \quad \text{et} \quad m_1{v_1}^2 = m_1{v'_1}^2 + m_2{v'_2}^2.$$

• Il y a alors deux cas envisageables (d'après la seconde équation) :

◊ ou bien $v'_2 = 0$ et alors $v'_1 = v_1$, ce qui correspond au cas limite (effleurement) où le “choc” est tellement faible qu'il est inexistant ;

◊ ou bien $\theta_2 = 0$ et $m_1.(v_1 - v'_1) = m_2v'_2$ et $m_1.({v_1}^2 - {v'_1}^2) = m_2{v'_2}^2$ d'où : $v_1 + v'_1 = v'_2$ puis : $v'_1 = v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$ et $v'_2 = v_1 \frac{2m_1}{m_1 + m_2}$, ce qui correspond au cas du choc “frontal”.

◊ remarque : le cas $m_2 > m_1$ donne algébriquement $v'_1 < 0$ si on considère $\theta_1 = 0$; cela correspond en fait à une norme positive avec $\theta_1 = \pi$ (retour en arrière).

2.b. • À partir de $E_1 = \frac{1}{2}m_1{v_1}^2$ et $v'_2 = v_1 \frac{2m_1}{m_1 + m_2}$ on obtient : $E'_2 = \frac{1}{2}m_2{v'_2}^2 = E_1 \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}$.

• Pour $m_1 = m_2$ ceci correspond à : $E'_2 = E_1$; ce qui est cohérent avec $v'_1 = 0$ et $v'_2 = v_1$ car l'énergie cinétique de m_1 est alors totalement transférée à m_2.

• Pour $m_1 \ll m_2$ ceci correspond à : $E'_2 \approx E_1\, 4\frac{m_1}{m_2}$ (≈ 0 en première approximation) ; ce qui est cohérent avec $v'_1 \approx -v_1$ et $v'_2 \approx v_1\, 2\frac{m_1}{m_2}$ (≈ 0 en première approximation), car m_1 “rebondit” alors sur m_2 presque sans l'influencer.

• Pour $m_1 \gg m_2$ ceci correspond à : $E'_2 \approx E_1\, 4\frac{m_1}{m_2}$ (≈ 0 en première approximation) ; ce qui est cohérent avec $v'_1 \approx v_1$ et $v'_2 \approx 2v_1$ (≈ 0 en première approximation), car m_1 “projette” alors m_2 en avant presque sans être influencée. On peut en outre remarquer que $v'_1 \approx v_1$ et $v'_2 \approx 2v_1$ correspondent à dire que, dans le référentiel où m_1 est initialement immobile, m_2 “rebondit” sur m_1 sans l'influencer.

2.c. • Il est difficile de mesurer directement la vitesse initiale des neutrons, dans la mesure où leur neutralité électrique complique leur détection. Mais on obtient pour les atomes d'hydrogène $v'_p = v_n \frac{2m_n}{m_n + m_N}$ et pour les atomes d'azote $v'_N = v_n \frac{2m_n}{m_n + m_N}$.

• Ceci correspond à : $\frac{v'_p}{v'_N} = \frac{m_n + m_N}{m_n + m_p}$ d'où on tire : $m_n = \frac{m_N + m_p \frac{v'_p}{v'_N}}{\frac{v'_p}{v'_N} - 1} \approx m_p$.

II. Choc inélastique et référentiel du centre de masse

1. • On peut utiliser la conservation de la quantité de mouvement pour l'ensemble isolé ; on en déduit en particulier que $\vec{v'}_C$ est forcément parallèle à $\vec{v}_A$ et que le choc peut être décrit algébriquement le long de l'axe du mouvement initial. On obtient ainsi : $m\, v_A = M'\, v'_C$ en notant $M' = M + m$.

• Un choc élastique conserverait l'énergie cinétique : $\frac{1}{2}m\, v_A^2 = \frac{1}{2}M'\, v'_C{}^2$; donc le système formé de ces deux équations se simplifierait sous la forme : $m\, v_A = M'\, v'_C$ et $v_A = v'_C$ qui donnerait $m = M'$ contraire à l'hypothèse. Donc le choc est forcément inélastique.

• La variation algébrique de l'énergie cinétique lors du choc s'écrit : $\Delta E_c = W = \frac{1}{2}M'\, v'_C{}^2 - \frac{1}{2}m\, v_A^2$ mais $v'_C = v_A \frac{m}{M'}$ et donc : $W = \frac{m^2}{2M'}v_A^2 - \frac{1}{2}m\, v_A^2 = E_0.(\frac{m}{M'} - 1) = -E_0 \frac{M}{M'}$.

◊ remarque : cette variation d'énergie cinétique est égale au travail résistant des forces d'interaction (forces intérieures au système) pendant le choc.

2.a. • L'énoncé indique que la rotation du référentiel est négligeable (par rapport au référentiel de Copernic, supposé galiléen). Par ailleurs, l'ensemble du système n'est soumis à aucune force extérieure, donc son centre d'inertie a un mouvement rectiligne uniforme ; par suite le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ est galiléen.

2.b. • Par rapport à $\mathcal{R}^*$ la quantité de mouvement totale est égale à la quantité de mouvement associée à G avec la masse totale, c'est-à-dire $\vec{0}$; donc C est immobile dans $\mathcal{R}^*$ et son énergie cinétique est nulle.

2.c. • Par rapport à $\mathcal{R}$ la quantité de mouvement totale est égale à la quantité de mouvement associée à G avec la masse totale : $m\, v_A = M'\, v_G$ et par conséquent : $v_G = v'_C = v_A \frac{m}{M'}$.

• Par rapport à $\mathcal{R}^*$ la vitesse initiale de A est : $v^*_A = v_A - v_G = v_A.(1 - \frac{m}{M'})$ donc la quantité de mouvement est $p^*_A = -p^*_B = m\, v_A.(1 - \frac{m}{M'}) = m\, v_A \frac{M}{M'}$ (algébriquement). Par suite : $v^*_B = \frac{p^*_B}{M} = -\frac{m}{M} v_A \frac{M}{M'}$.

• On en déduit l'énergie cinétique : $E^* = \frac{1}{2}m\, v^*_A{}^2 + \frac{1}{2}M\, v^*_B{}^2 = E_0.(\frac{M}{M'})^2(1 + \frac{m}{M}) = E_0 \frac{M}{M'} = -W$.

◊ remarque : on retrouve donc dans le référentiel du centre de masse : $\Delta E_c^* = 0 - E^* = W$.

III. Désintégration d'une particule et référentiel du centre de masse

1. • La conservation de la quantité de mouvement peut s'écrire : $M\vec{V_0} = m_1\vec{V_1} + m_2\vec{V_2}$.

2. • La variation de l'énergie cinétique peut s'écrire : $\Delta E_c = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 - \frac{1}{2}MV_0^2$. En remplaçant à l'aide de l'équation précédente, on obtient : $M^2V_0^2 = m_1^2V_1^2 + m_2^2V_2^2 + 2\, m_1m_2\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}$ et donc, après simplification : $\Delta E_c = \frac{m_1m_2}{2M}(\vec{V_2} - \vec{V_1})^2$.

◊ remarque : ceci correspond à l'énergie cinétique du “mobile fictif” équivalent : $\Delta E_c = \frac{1}{2}\mu V^2$ avec la masse réduite : $\mu = \frac{m_1m_2}{M}$ et la vitesse relative : $\vec{V} = \vec{V_2} - \vec{V_1}$.

• Pendant le choc, l'énergie totale du système (isolé) est conservée : l'énergie cinétique totale augmente d'une quantité égale à l'énergie W libérée par la désintégration de la particule initiale.

3.a. • Le référentiel du centre de masse est le référentiel de la particule initiale ; il est donc en translation uniforme, à la vitesse $\vec{V_0}$, par rapport à un référentiel galiléen ; il est donc lui-même galiléen.

3.b. • Dans le référentiel du centre de masse, l'impulsion totale est nulle : $\vec{p_1} + \vec{p_2} = m_1 \vec{V'_1} + m_2 \vec{V'_2} = \vec{0}$; par suite : $\vec{p_2} = -\vec{p_1}$ et $p_2 = p_1$.

• Mais d'après ce qui précède : $W = \Delta E_c = \frac{1}{2}\mu.(\vec{V'_2} - \vec{V'_1})^2 = \frac{1}{2}\mu.(\frac{\vec{p_2}}{m_2} - \frac{\vec{p_1}}{m_1})^2 = \frac{p_1^2}{2\mu}$; et donc finalement : $p_1 = p_2 = \sqrt{2\mu W}$.

◊ remarque : on doit obtenir $W = \Delta E_c$ quel que soit le référentiel (galiléen), mais ceci est automatiquement vérifié puisque cette quantité s'exprime en fonction de la vitesse relative $\vec{V} = \vec{V'_2} - \vec{V'_1}$.

IV. Choc inélastique et énergie de seuil

1. • La conservation de la quantité de mouvement peut s'écrire : $m_1 \vec{v_1} = m_1 \vec{v'_1} + m_2 \vec{v'_2}$.

• La conservation de l'énergie peut s'écrire : $\frac{1}{2}m_1 v_1{}^2 = E + \frac{1}{2}m_1 v'_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2 v'_2{}^2$.

2. • L'équation vectorielle s'écrit : $m_1.(\vec{v_1} - \vec{v'_1}) = m_2 \vec{v'_2}$ donc : $m_1{}^2.[v_1{}^2 + v'_1{}^2 + 2v_1 v'_1 \cos(\theta)] = m_2{}^2 v'_2{}^2$.

• L'autre équation donne alors : $m_1{}^2.[v_1{}^2 + v'_1{}^2 + 2v_1 v'_1 \cos(\theta)] = m_2.[m_1 v_1{}^2 - 2E - m_1 v'_1{}^2]$ c'est-à-dire : $m_1 v'_1{}^2.(m_1 + m_2) + 2\, m_1{}^2\, v_1 v'_1 \cos(\theta) + m_1 v_1{}^2.(m_1 - m_2) + 2E\, m_2 = 0$.

• Pour que cette équation ait des solutions, il faut que son discriminant soit positif ; cette condition peut s'écrire : $m_1\, v_1{}^2.[m_1{}^2 \cos^2(\theta) - (m_1{}^2 - m_2{}^2)] - 2E\, m_2.(m_1 + m_2) \geq 0$, c'est-à-dire : $E_{c1} = \frac{1}{2}m_1 v_1{}^2 \geq E_0$ avec : $E_0 = E\,\frac{m_2.(m_1 + m_2)}{m_2^2 - m_1^2 \sin^2(\theta)}$.

• La valeur de θ la plus favorable correspond à la valeur minimum de $E_0(\theta)$, obtenue pour le maximum du dénominateur ($\theta = 0$; choc “frontal”) : $E_0 = E\,\frac{m_1 + m_2}{m_2}$.

◊ remarque : l'énergie minimum pour l'excitation est supérieure à l'énergie d'excitation, car il faut aussi fournir l'énergie cinétique de “recul” de la particule choquée.

V. Expérience de Rutherford

1. • Les atomes de la cible étant liés, tout se passe comme si les particules α interagissaient avec des noyaux de masse égale à celle de l'ensemble de la cible : l'effet de recul est négligeable et on peut supposer le noyau cible fixe en O.

2. • La force d'interaction est centrale, donc de moment nul, donc le moment cinétique est constant et il suffit de calculer à l'instant initial : $\vec{\sigma}_O = -mv_0 b\, \vec{k}$.

3. • La force d'interaction dérive d'une énergie potentielle (nulle à l'infini) : $E_p = \frac{K}{r}$ avec $K = \frac{2Z_2 q_e^2}{4\pi\varepsilon_0}$; l'énergie mécanique est donc constante et il suffit de calculer à l'instant initial : $E_m = \frac{1}{2}mv_0{}^2$.

4. • La conservation du moment cinétique correspond à : $\vec{\sigma}_O = -mv_0 b\, \vec{k} = -mv_1 r_m\, \vec{k}$, d'où $v_1 = v_0 \frac{b}{r_m}$.

• La conservation de l'énergie mécanique correspond à : $E_m = \frac{1}{2}mv_0{}^2 = \frac{1}{2}mv_1{}^2 + \frac{K}{r_m}$, d'où la distance minimale d'approche : $r_m = \frac{K}{mv_0^2}.\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{mv_0 b}{K}\right)^2}\right)$.

◊ remarque : il n'est pas possible de mesurer b avec précision, mais on peut le relier à la déviation asymptotique θ_{lim} ; ceci a permis à Rutherford de montrer que la loi coulombienne (associée à $E_p = \frac{K}{r}$) reste valable jusqu'à des distances d'approche de l'ordre de 10^{-15} m, c'est-à-dire que la taille des noyaux atomiques est environ 10^5 fois plus petite que la taille des atomes.