M. III - DYNAMIQUE ; ÉNERGIE MÉCANIQUE

1. Théorème de l'énergie cinétique

• Soit M un point soumis à une force $\vec{F}$, on définit le travail δW de cette force lors d'un déplacement $d\overrightarrow{OM}$ par : $\delta W = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt$.

Le travail de la force $\vec{F}$ pour un déplacement de M_1 à M_2 est par conséquent : $W_{12} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}$ (dans le cas général, l'intégrale dépend du trajet suivi).

La puissance fournie au point M par la force $\vec{F}$ est par ailleurs : $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

• D'après le principe fondamental :

$$\sum \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{et} \quad \sum \delta W_i = m\,\vec{v} \cdot d\vec{v} = d\left(\frac{1}{2} m\, v^2\right) = dE_c \ .$$

La variation de l'énergie cinétique est donc égale à la somme des travaux des forces exercées sur le point M : $\Delta E_c = W$.

2. Énergie potentielle

• Une force $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle (notée E_p) si et seulement s'il existe une fonction $E_p(M)$ telle que : $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$ (gradient de E_p), c'est-à-dire en coordonnées cartésiennes : $F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$; $F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$; $F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$.

Le travail infinitésimal $dW = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = -dE_p$ donne dans ces conditions une intégrale $W_{12} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = -\Delta E_p$ indépendante du trajet suivi pour aller de M_1 à M_2 (la fonction E_p est une "fonction d'état").

◊ remarque : si le travail W_{12} ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée, alors le travail sur un trajet fermé est nul.

◊ remarque : compte tenu de la définition, seules les <u>variations</u> de E_p interviennent, donc l'énergie potentielle est définie à une constante additive près (dépendant du choix arbitraire de la référence).

• Par exemple, pour une force de pesanteur uniforme :

$$\vec{P} = m\,\vec{g} \quad ; \quad -dE_p = dW = m\,\vec{g} \cdot d\overrightarrow{OM} = -m\,g\,dz \ ;$$

donc $E_p(z) = m\,g\,z + E_{p0}$ où E_{p0} est une constante arbitraire.

• De même, pour une force subie par une particule de charge q soumise à un champ électrostatique $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\,\vec{u}_x$ uniforme :

$$\vec{F} = q\,\vec{\mathcal{E}} \quad ; \quad -dE_p = dW = q\,\vec{\mathcal{E}} \cdot d\overrightarrow{OM} = q\,\mathcal{E}\,dx \ ;$$

donc $E_p(x) = \ q\,\mathcal{E}\,x + E_{p0}$ où E_{p0} est une constante arbitraire.

Par contre, pour la force électrostatique causée sur q par une autre charge ponctuelle q' placée en O :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q\,q'}{r^2}\,\vec{u}_r \quad ; \quad -dE_p = dW = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q\,q'}{r^2}\,\vec{u}_r \cdot d\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q\,q'}{r^2}\,dr \ ;$$

donc $E_p(r) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q\,q'}{r} + E_{p0}$ où E_{p0} est une constante arbitraire.

• Dans le cas d'un ressort disposé entre O et M :

$$\vec{F} = -k\,.(r - \ell_0)\,\vec{u}_r \ ;$$

$$-dE_p = dW = -k\,.(r - \ell_0)\,\vec{u}_r \cdot d\overrightarrow{OM} = -k\,.(r - \ell_0)\,dr \ ;$$

donc : $E_p(r) = \frac{1}{2}k\,.(r - \ell_0)^2 + E_{p0}$ où E_{p0} est une constante arbitraire.

• Les forces de frottement ne dérivent pas d'une énergie potentielle puisque le travail des frottements sur un trajet fermé est non nul. Ce travail est toujours résistant, par exemple : $\vec{f} = -k\,\vec{v}$; $\delta W = -k\,\vec{v} \cdot d\overrightarrow{OM} = -k\,v^2\,dt \ \leq 0$.

◊ remarque : on dit que ces forces sont “dissipatives” d'énergie mécanique ; l'étude énergétique complète nécessite alors de prendre en compte l'énergie thermique.

◊ remarque : pour la réaction normale $\vec{R}$ au contact d'un solide, le travail est nul : $dW = \vec{R} \cdot d\overrightarrow{OM} = 0$; mais on <u>ne peut pas</u> écrire : “ $-dE_p = dW = 0$ ” puis “ $E_p = E_{p0}$ ” (constante arbitraire) car $\vec{R} \neq -\vec{\nabla}E_{p0} = \vec{0}$ ($\vec{R}$ ne dérive pas d'une énergie potentielle).

🕮 *exercices n° I et II.*

3. Théorème de l'énergie mécanique

• Pour un point matériel soumis uniquement à des forces dérivant d'une énergie potentielle, on peut poser $E_p = \sum E_{pi}$ d'où on déduit le théorème de l'énergie cinétique : $-\Delta E_p = W = \Delta E_c$.

En définissant alors une “énergie mécanique” par $E_m = E_c + E_p$, la relation précédente s'écrit : $\Delta E_m = 0$ (l'énergie mécanique est constante).

◊ remarque : les forces qui ne font pas varier E_m sont dites “conservatives” de l'énergie mécanique :

◊ les forces qui dérivent d'une énergie potentielle sont conservatives ;

◊ celles qui ne dérivent pas d'une énergie potentielle mais dont le travail est nul (comme la réaction normale $\vec{R}$) sont aussi conservatives de E_m .

• Pour un point soumis à :

◊ des forces $\vec{F}_i$ dérivant d'une énergie potentielle ;

◊ des forces $\vec{F}_j'$ ne dérivant pas d'une énergie potentielle ;

on peut écrire plus généralement : $-\Delta E_p = \sum W_i = W - \sum W_j' = \Delta E_c - \sum W_j'$.

Ceci peut s'écrire : $\Delta E_m = \sum W_j'$ (théorème de l'énergie mécanique) où ne sont considérés à droite que les travaux des forces non conservatives de E_m .

◊ remarque : le théorème de l'énergie mécanique n'apporte pas d'autre d'information que le théorème de l'énergie cinétique ; il ne fait qu'en donner une autre expression, plus pratique si on connaît l'énergie potentielle.

4. Application à l'étude des mouvements

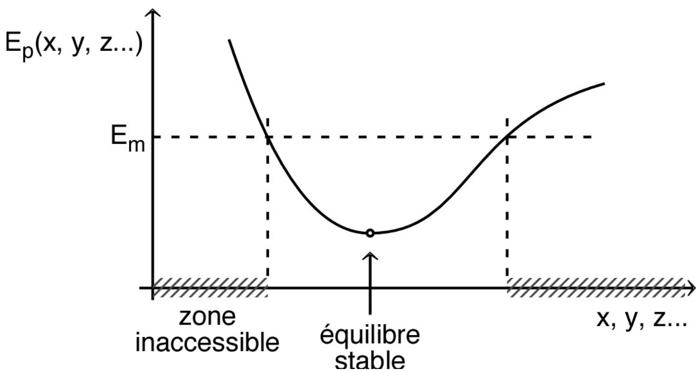
• Pour un tir de projectile en l'absence de frottement : $E_m = \frac{1}{2} m\, v^2 + m\, g\, z$ est constante, par suite : $v^2 = v_0^2 - 2\, g\, z$; cette relation ne résout pas le problème du mouvement (calcul de $v(t)$ et $z(t)$), mais peut dans certains cas apporter une information utile en évitant des calculs plus compliqués.

• Pour le glissement sans frottement d'un point à la surface d'une sphère : $E_m = \frac{1}{2} m\, v^2 + m\, g\, z$ est constante, mais avec un mouvement plus contraint : $v = r\,\dot{\theta}$ et $z = z_0 + r\ \cos(\theta)$; donc : $r\,\dot{\theta}^2 = 2\,g\,.[\cos(\theta_0)\ -\ \cos(\theta)]$ (pour un départ avec vitesse nulle), équation qui pourrait donner $\theta(t)$.

📖 *exercices n° III et IV.*

5. Application à l'étude des équilibres

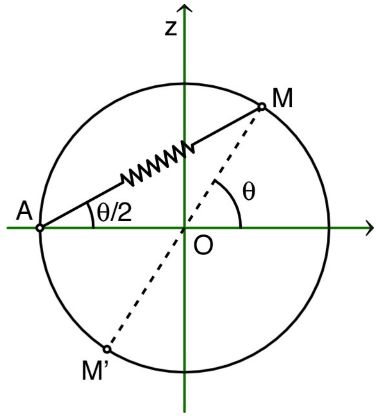
• Puisque l'énergie cinétique est toujours positive, le point étudié ne peut pas se déplacer dans les régions de l'espace où $E_p(M) > E_m$ ("barrière" et "puits" d'énergie potentielle) :



Dans le cas d'un puits d'énergie potentielle, le point oscille entre des positions extrêmes (oscillations amorties s'il y a en plus des frottements).

• Le sens de la force $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p = -\frac{dE_p}{dx}\,\vec{u}_x$ montre que les équilibres stables correspondent aux minimums relatifs de E_p ("force de rappel") et que les maximums relatifs correspondent à des équilibres instables.

• Soit par exemple un point M mobile sans frottement sur un cercle de rayon R , maintenu depuis le point A par un ressort de masse négligeable, de raideur k et de longueur “à vide” $\ell_0 \ll R$.



On obtient : $E_p(r) = \frac{1}{2} k \,.\, (\ell - \ell_0)^2 + E_{p0}$ où $\ell = 2\,R\,\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $z = R\,\sin(\theta)$ (la réaction normale a un travail nul, qu’on peut omettre dans le raisonnement basé sur l’énergie).

• On peut dans ce cas décrire la position avec la variable θ car le déplacement d'une longueur d'arc $dL = R\,d\theta$ est simplement proportionnel à $d\theta$ (cela ne change ni le signe, ni l'annulation des dérivées).

• L’équilibre impose E_p extremum :

$$\frac{dE_p}{d\theta} = -k \,.\, (\ell - \ell_0)\, R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + m\,g\,R\,\cos(\theta) = 0 \,.$$

Cette équation se simplifie si $\ell \approx R \gg \ell_0$:

$$\ell \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = R\,\sin(\theta) \quad ; \quad \frac{dE_p}{d\theta} \approx -k\,R^2 \sin(\theta) + m\,g\,R\,\cos(\theta) = 0 \;;$$

on en déduit les deux points M et $M’$ tels que : $\theta_e = \arctan\left(\frac{m\,g}{k\,R}\right)$ $[\mathrm{mod}\,\pi]$.

• L’équilibre stable impose E_p minimum :

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} \approx -k\,R^2 \cos(\theta_e) - m\,g\,R\,\sin(\theta_e) > 0 \,.$$

Compte tenu de la relation vérifiée à l’équilibre, cette relation correspond à :

$$\left(\left(\frac{m\,g}{k\,R}\right)^2 + 1\right) \cos(\theta_e) = \frac{1}{\cos(\theta_e)} < 0 \;;$$

l’équilibre est donc stable en $M’$ et instable en M .

◊ remarque : si ℓ_0 n'est pas tout à fait négligeable, un développement à l'ordre le plus bas donne un décalage en $\theta'_e \approx \theta_e + \frac{\ell_0}{2\,R}\,(1 - \cos(\theta_e))\,|\cos(\theta_e)|$.

🕮 *exercices n° V et VI.*