DYNAMIQUE - ÉNERGIE - exercices

A. EXERCICES DE BASE

I. Énergie cinétique

• Un pendule est constitué d'un point matériel M de masse m suspendu à un point fixe A par un fil inextensible, de longueur ℓ et de masse négligeable. On lâche le pendule avec une vitesse initiale nulle, le fil faisant un angle α_0 par rapport à la verticale.

• Une tige horizontale est placée au dessous de A , à une distance $d < \ell$, de sorte que le fil heurte cette tige lorsque le pendule passe par sa position d'équilibre.

1. • Montrer que la vitesse de M se conserve pendant le choc.

2. • En prenant $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, déterminer la condition (sur d et ℓ) pour que le fil s'enroule autour de la tige en restant tendu.

II. Énergie potentielle

• Deux particules "ponctuelles" A et B exercent d'une sur l'autre des forces $\vec{F}_{A\to B}$ et $\vec{F}_{B\to A}$ opposées dont les normes sont : $F = \frac{\alpha}{r^n}$ où α est une constante positive, n est un nombre entier et $r = AB$.

1. • Écrire les expressions de $\vec{F}_{A\to B}$ et $\vec{F}_{B\to A}$ dans le cas où ces forces sont répulsives.

2. • Quelle est l'énergie potentielle correspondant à cette interaction ?

III. Énergie cinétique et équation du mouvement

• Un pendule simple est constitué d'une masse "ponctuelle" m reliée à un point fixe O par un fil sans masse, de longueur constante ℓ , qu'on suppose en permanence rester tendu. Le mouvement s'effectue dans un plan vertical et on repère la position par l'angle θ avec la verticale.

• Montrer que le théorème de l'énergie cinétique conduit à une "intégrale première" du mouvement : conservation de la quantité "énergie".

• En dérivant cette quantité par rapport au temps, montrer qu'on obtient l'équation du mouvement.

IV. Types de mouvement d'un pendule

• Un pendule simple est constitué d'une masse "ponctuelle" m reliée à un point fixe O par un fil sans masse, de longueur constante ℓ . Le point M étant dans sa position d'équilibre, on lui communique une vitesse initiale horizontale v_0 .

• Montrer que, suivant la valeur de v_0 , trois types de mouvement sont possibles ; préciser les valeurs limites de v_0 correspondantes.

V. Énergie et limite de trajectoire

1. • Une charge électrique q est fixée à l'origine O . À une distance L de O , on lance une particule de charge $-q$ et de masse m , le long de l'axe Ox et dans le sens de l'éloignement. Quelle vitesse initiale v_0 doit-on lui communiquer pour qu'elle échappe à l'attraction de la charge placée en O ?

◊ rappel : selon la loi de Coulomb, les forces (réciproques) d'interaction entre deux charge q et q' séparées par une distance r ont pour norme $\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{|q\,q'|}{r^2}$.

2. • On lance ensuite une autre particule de charge q et de masse m , le long de Ox et dans le sens du rapprochement. Montrer qu'elle ne peut pas atteindre O et calculer la distance minimale d'approche.

VI. Énergie potentielle et stabilité d'un équilibre

• Une particule "ponctuelle" de masse m , située en A , est repérée par $\overrightarrow{OA} = r\,\vec{u}_r$ (avec $\vec{u}_r$ vecteur unitaire radial). Cette particule est soumise à deux forces : $\vec{F}_1 = -K_1\,r\,\vec{u}_r$ et $\vec{F}_2 = K_2\,\frac{\vec{u}_r}{r^2}$ où K_1 et K_2 sont des constantes positives. On néglige la pesanteur.

1. • Exprimer la force totale $\vec{F}$ que subit la particule. Calculer la distance d'équilibre r_0 de cette particule.

2. • Montrer que $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle $E_p(r)$; exprimer E_p en posant $E_p(r_0) = \frac{3}{2}\,\sqrt[3]{K_1\,K_2^2}$.
• Déterminer, d'après de $E_p(r)$, si l'équilibre pour $r = r_0$ est stable, instable ou indifférent :
◊ vis à vis des variations de r ;
◊ vis à vis des rotations autour de O pour $r = r_0$ fixé.

B. EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

VII. Énergie mécanique et équation du mouvement

1. • Un point matériel M , de masse m , est mobile sans frottement sur un rail dont la forme est supposée connue, déterminée par les expressions des coordonnées cartésiennes $\{x(q)\,,y(q)\,,z(q)\}$.
• Ce point est soumis à des forces dérivant (au total) d'une énergie potentielle $E_p(x\,,y\,,z)$ dont l'expression est supposée connue. On se propose d'étudier le mouvement par une méthode basée sur l'énergie, mais dans un cas où le point M est repéré par un paramètre de position quelconque, noté q .
a) Montrer que l'expression de l'énergie cinétique peut se mettre sous la forme : $E_c = \frac{1}{2}\mathfrak{m}(q)\,\dot{q}^2$ où $\mathfrak{m}(q)$ est un coefficient d'inertie généralisé, dépendant du paramètre de position q .
b) En déduire les expressions correspondantes de l'énergie potentielle et de l'énergie mécanique.
c) Montrer qu'en dérivant l'expression de l'énergie mécanique on peut retrouver une équation différentielle du mouvement correspondant au principe fondamental de la dynamique. Commenter.
☞ indication : on peut remarquer que $\frac{d\dot{q}}{dq} = \frac{\ddot{q}}{\dot{q}}$.
d) Montrer que la recherche des positions d'équilibre se ramène à l'étude des dérivées de l'énergie potentielle.

2. • On se limite à un mouvement un plan vertical (Oxz) où le paramètre de position est l'abscisse curviligne s correspondant à la distance parcourue sur le rail depuis l'origine. La forme du rail est supposée déterminée par l'expression $z(x)$. L'énergie potentielle se limite à celle de la pesanteur. On se propose de chercher s'il est possible de choisir la forme du rail de telle façon que l'équation différentielle du mouvement, par rapport à la variable s , soit celle d'un oscillateur harmonique (de raideur notée k).
a) Quelle est l'expression du coefficient d'inertie $\mathfrak{m}(s)$ correspondant ?
b) En dérivant par rapport au temps l'expression de l'énergie mécanique, montrer qu'on obtient une équation différentielle du mouvement décrit par $s(t)$.
c) Dans le cas de l'oscillateur harmonique par rapport à s , montrer que l'intégration de l'équation donne : $z(s) = \frac{k}{2\,m\,g}\,s^2$.
d) Établir l'équation différentielle concernant $x(s)$: $dx = ds\,\sqrt{1 - \left(\frac{k\,s}{m\,g}\right)^2}$.
e) En posant $\frac{k\,s}{m\,g} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, montrer que l'intégration donne : $x(s(\theta)) = \frac{m\,g}{4\,k}\,(\theta + \sin(\theta))$.
f) À quelle forme de courbe cela correspond-il ?

VIII. Énergie mécanique et équation du mouvement

1. • Un point matériel M , de masse m , est mobile sans frottement sur un rail dont la forme est supposée connue, déterminée par les expressions des coordonnées cartésiennes $\{x\,, z(x)\}$ dans un plan vertical.

• Ce point n'est soumis qu'à des forces conservatives, décrites par l'énergie potentielle $E_p = m\,g\,z$. On se propose d'étudier le mouvement par une méthode basée sur l'énergie.

a) Montrer que l'expression de l'énergie cinétique peut se mettre sous la forme : $E_c = \frac{1}{2}\mathfrak{m}(x)\,\dot{x}^2$ où $\mathfrak{m}(x)$ est un coefficient d'inertie généralisé, dépendant du paramètre de position x .

b) En déduire les expressions correspondantes de l'énergie potentielle et de l'énergie mécanique.

c) Montrer qu'en dérivant l'expression de l'énergie mécanique on peut retrouver une équation différentielle du mouvement correspondant au principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{dz}{dx}\,\frac{d^2z}{dx^2}\,\dot{x}^2 + \left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\ddot{x} + g\,\frac{dz}{dx} = 0\ .$$

☞ indication : on peut remarquer que $\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}}$.

2. • On se propose de chercher s'il est possible de choisir la forme du rail de telle façon que l'équation différentielle du mouvement, par rapport à la variable x , soit celle d'un oscillateur harmonique (de raideur notée k).

a) L'équation différentielle de l'oscillateur harmonique impose une expression de $\ddot{x}$ en fonction de x . En substituant par ailleurs $\dot{x}^2$ déduit de l'expression de E_m (dont la valeur constante se déduit des conditions initiales), montrer qu'on obtient une équation différentielle sur l'expression $z(x)$ de la forme du rail.

b) Les solutions de cette équation différentielle compliquée peuvent être recherchées à l'aide d'un logiciel de calcul formel. Le logiciel Maple donne : $-\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\frac{k}{m}\,(x^2 + C) + 2\,\frac{E_m}{m}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + 2\,g\,z = 0$. Quelle valeur peut ont proposer pour la constante d'intégration C ?

c) Peut-on intégrer l'équation différentielle ainsi obtenue ?

d) Une variante de la méthode envisagée en (2.a) consiste à substituer $\dot{x}$ en fonction de x (compte tenu de la forme sinusoïdale connue pour l'oscillateur harmonique). Montrer qu'on obtient ainsi une autre équation différentielle sur l'expression $z(x)$ de la forme du rail.

e) Peut-on intégrer l'équation différentielle ainsi obtenue ?