DYNAMIQUE - PRINCIPE FONDAMENTAL - corrigé des exercices

I. Tir dans le vide

1. • La relation fondamentale de la dynamique de translation peut s'écrire : $m\,\vec{a} = \vec{P} = m\,\vec{g}$ puisqu'on néglige les autres effets.
• Compte tenu des conditions initiales, une première intégration donne : $\vec{v}(t) = \vec{g}\,t + \vec{v}_0$; une seconde intégration donne : $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2 + \vec{v}_0\,t + \overrightarrow{OM}_0$.
• Le mouvement est en entier dans le plan vertical défini par la position M_0 et les directions de $\vec{v}_0$ et $\vec{g}$; on peut donc raisonner avec deux coordonnées x et z dans ce plan.
• Si on prend M_0 comme origine, on cherche à obtenir : $x = v_{0x}\,t = v_0\,\cos(\alpha)\,t$ maximum (où α est l'angle de $\vec{v}_0$ avec l'horizontale), tout en imposant : $z = v_{0z}\,t - \frac{1}{2}g\,t^2 = v_0\,\sin(\alpha)\,t - \frac{1}{2}g\,t^2 = h$. Aucune condition n'étant imposée sur la durée du trajet, seule la trajectoire importe et on peut obtenir son équation en éliminant t : $z(x) = \tan(\alpha)\,x - \frac{g}{2\,v_0^2\,\cos^2(\alpha)}\,x^2 = \tan(\alpha)\,x - [1 + \tan^2(\alpha)]\,\frac{g}{2\,v_0^2}\,x^2 = h$.
Le maximum x_m est alors obtenu en choisissant la valeur de α la plus efficace.
• On peut ensuite considérer que si, pour x fixé, on pouvait ajuster α afin d'atteindre $z(x) > h$, alors (puisque le point M finit toujours par retomber) il serait forcément possible d'atteindre $z(x') = h$ avec un $x' > x$. Autrement dit : pour $x = x_m$ le point d'altitude $z(x_m) = h$ se trouve forcément sur la parabole du sûreté (le plus haut qu'il est possible d'atteindre en ajustant α pour $x = x_m$ donné).
◊ remarque : cette "équivalence" simplifie beaucoup le calcul car il est plus facile de chercher l'extremum de z pour x fixé (l'équation de la trajectoire est quadratique en x et linéaire en z).
• Pour établir l'équation de la courbe de sûreté, on peut commencer par simplifier les notations en posant (par exemple) : $\lambda = \tan(\alpha)$ et $\mu = \frac{g}{v_0^2}$; on obtient ainsi : $z = \lambda\,x - (1 + \lambda^2)\,\frac{\mu}{2}\,x^2$.
• Pour chercher le maximum, on peut ensuite dériver cette relation par rapport à λ (cela revient au même que de dériver par rapport à α) en considérant x fixé : $0 = \frac{dz}{d\lambda} = x - \lambda\,\mu\,x^2$.
• Le maximum cherché est tel que $\frac{dz}{d\lambda} = 0$ c'est-à-dire : $\lambda\,x = \frac{1}{\mu}$. Il suffit alors de remplacer dans l'expression de z : $z_m(x) = \lambda\,x - (1 + \lambda^2)\,\frac{\mu}{2}\,x^2 = \frac{1-\mu^2\,x^2}{2\,\mu}$ (c'est l'équation de la parabole de sûreté).
• Inversement, en imposant dans cette équation $z_m(x_m) = h$, on obtient :
$$x_m = \frac{\sqrt{1-2\,\mu\,h}}{\mu} = \frac{v_0^2}{g}\,\sqrt{1 - \frac{2\,g\,h}{v_0^2}} \approx 2900\ \mathrm{m}\ .$$
◊ remarque : en négligeant les frottements sur l'air, la précision est médiocre pour une telle distance.
◊ remarque : on obtient aussi : $\lambda_m = \frac{1}{\mu\,x_m} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2\,g\,h}{v_0^2}}} = 1{,}4 = \tan(\alpha_m)$ et $\alpha_m \approx 54° = 0{,}95\ \mathrm{rad}$.

2. • On cherche maintenant à obtenir : $z_m\left(\frac{x_m}{2}\right) = h$ (en supposant qu'en plaçant la nouvelle origine à une distance $\frac{x_m}{2}$ on garde l'altitude $z = 0$) ; ceci donne $\lambda\,\frac{x_m}{2} - (1 + \lambda^2)\,\frac{\mu}{8}\,x_m^2 = h$ d'où on déduit :
$$\lambda_1 = \frac{2-\sqrt{4-\mu\,.(\mu\,x_m^2+8\,h)}}{\mu\,x_m} = 1{,}07 \quad \text{et} \quad \alpha_1 \approx 47° = 0{,}82\ \mathrm{rad}$$ (éventuel tir tendu) ;
$$\lambda_2 = \frac{2+\sqrt{4-\mu\,.(\mu\,x_m^2+8\,h)}}{\mu\,x_m} = 4{,}55 \quad \text{et} \quad \alpha_2 \approx 78° = 1{,}35\ \mathrm{rad}$$ (tir en cloche).
◊ remarque : le tir tendu n'est possible que si l'obus peut arriver par dessous.

3. • La vitesse de l'obus quand il touche l'objectif peut se calculer en dérivant les coordonnées, puis en calculant l'instant de l'impact pour en déduire les coordonnées de la vitesse et sa norme. Mais on peut plus simplement utiliser le théorème de l'énergie cinétique ou la conservation de l'énergie mécanique, d'où on déduit : $v = \sqrt{v_0^2 - 2\,g\,h} = 143\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

II. Recherche de trajectoire

1.a. • Le principe fondamental de la dynamique de translation peut s'écrire : $m\,\vec{a} = k\,\overrightarrow{OM}$ ou encore : $\ddot{\overrightarrow{OM}} - \lambda^2\,\overrightarrow{OM} = \vec{0}$ en posant $\lambda = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

• Une telle équation différentielle du second ordre est linéaire (sans second membre) et peut s'intégrer (par exemple) à l'aide des coordonnées cartésiennes : $\ddot{x} - \lambda^2\,x = 0$; $\ddot{y} - \lambda^2\,y = 0$; $\ddot{z} - \lambda^2\,z = 0$.

• L'équation sur x a pour solution générale : $x = A\,\mathrm{e}^{\lambda\,t} + B\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t}$, donnant $\dot{x} = \lambda\,A\,\mathrm{e}^{\lambda\,t} - \lambda\,B\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t}$. La condition initiale $\dot{x}(0) = 0$ impose $A = B$; la condition initiale $x(0) = x_0$ donne $A = B = \frac{x_0}{2}$ c'est-à-dire : $x = \frac{x_0}{2}\left(\mathrm{e}^{\lambda\,t} + \mathrm{e}^{-\lambda\,t}\right) = x_0\,\cosh(\lambda\,t)$.

• L'équation sur y donne de même : $y = A\,\mathrm{e}^{\lambda\,t} + B\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t}$ avec $\dot{y} = \lambda\,A\,\mathrm{e}^{\lambda\,t} - \lambda\,B\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t}$. La condition initiale $y(0) = 0$ impose $A = -B$; la condition initiale $\dot{y}(0) = v_0$ donne $A = -B = \frac{v_0}{2\,\lambda}$ c'est-à-dire : $y = \frac{v_0}{2\,\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda\,t} - \mathrm{e}^{-\lambda\,t}\right) = \frac{v_0}{\lambda}\,\sinh(\lambda\,t)$.

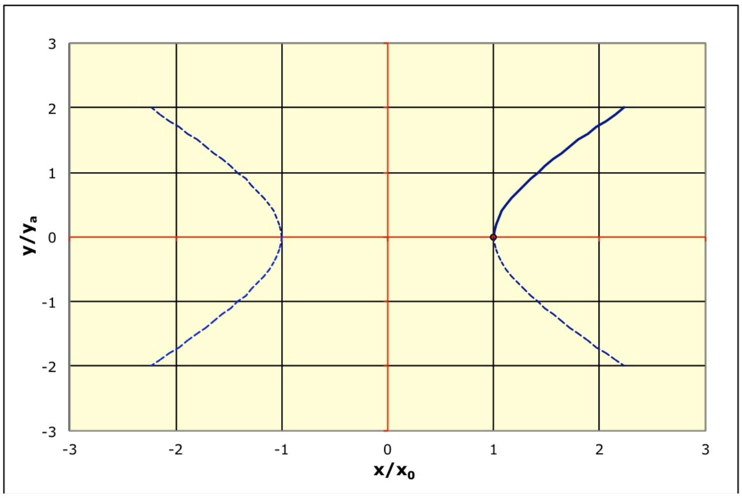
• L'équation sur z donne de même : $z = A\,\mathrm{e}^{\lambda\,t} + B\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t}$ avec $\dot{z} = \lambda\,A\,\mathrm{e}^{\lambda\,t} - \lambda\,B\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t}$. La condition initiale $\dot{z}(0) = 0$ impose $A = B$; la condition initiale $z(0) = 0$ donne $A = B = 0$ donc $z = 0$.

1.b. • La relation $z = 0$ montre que le mouvement s'effectue dans le plan Oxy (les mouvements à accélération radiale sont contenus dans le plan déterminé par les conditions initiales).

2.a. • Les équations de la trajectoire sont $z = 0$ et l'équation obtenue en éliminant t entre $x(t)$ et $y(t)$ dans le plan Oxy (correspondant à $z = 0$).

• Si on n'est pas familier des fonctions "hyperboliques" $\cosh$ et $\sinh$, on peut simplifier les notations : $\Lambda = \mathrm{e}^{\lambda\,t}$; $\xi = \frac{2\,x}{x_0} = \Lambda + \frac{1}{\Lambda}$ et $\eta = \frac{2\,\lambda\,y}{v_0} = \Lambda - \frac{1}{\Lambda}$. Ceci donne : $\Lambda = \frac{\xi+\eta}{2}$ et $\Lambda = \frac{2}{\xi-\eta}$; $\xi^2 - \eta^2 = 4$; $\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - \left(\frac{\lambda\,y}{v_0}\right)^2 = 1$.

2.b. • L'allure de la trajectoire est la suivante :

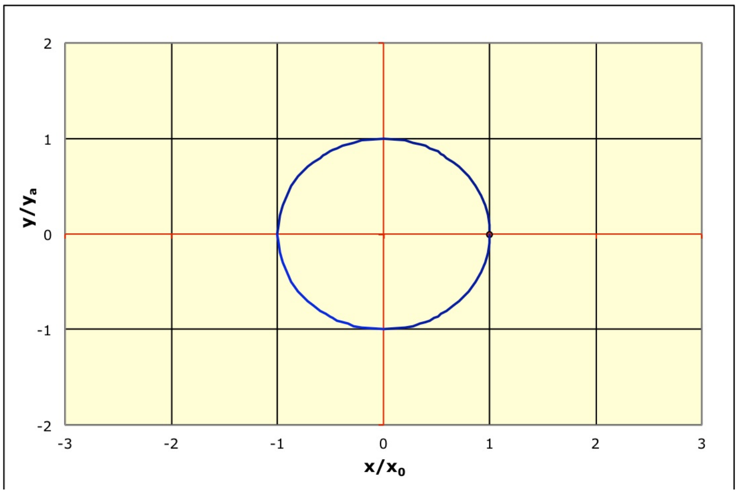


• C'est une hyperbole, dont les sommets (sur l'axe des x) ont pour abscisses $x = \pm x_0$ et dont les asymptotes (obliques) ont pour équations : $\frac{y}{y_a} = \pm\frac{x}{x_0}$ (en posant $y_a = \frac{v_0}{\lambda}$). La trajectoire est la branche d'hyperbole passant par $x = x_0$.

3.a. • Le principe fondamental de la dynamique de translation peut s'écrire : $m\,\vec{a} = -k\,\overrightarrow{OM}$ ou encore : $\ddot{\overrightarrow{OM}} + \omega^2\,\overrightarrow{OM} = \vec{0}$ en posant $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (il s'agit ici d'une force attractive).

• Une telle équation différentielle peut s'intégrer (par exemple) à l'aide des coordonnées cartésiennes : $\ddot{x} + \omega^2\,x = 0$; $\ddot{y} + \omega^2\,y = 0$; $\ddot{z} + \omega^2\,z = 0$.

• L'équation sur x donne : $x = A\ \cos(\omega\ t) + B\ \sin(\omega\ t)$ avec $\dot{x} = -\omega\ A\ \sin(\omega\ t) + \omega\ B\ \cos(\omega\ t)$. La condition initiale $\dot{x}(0) = 0$ impose $B = 0$; la condition initiale $x(0) = x_0$ donne $A = x_0$ c'est-à-dire : $x = x_0\ \cos(\omega\ t)$.
• L'équation sur y donne : $x = A\ \cos(\omega\ t) + B\ \sin(\omega\ t)$ avec $\dot{y} = -\omega\ A\ \sin(\omega\ t) + \omega\ B\ \cos(\omega\ t)$. La condition initiale $y(0) = 0$ impose $A = 0$; la condition initiale $\dot{y}(0) = v_0$ impose $B = \frac{v_0}{\omega}$ c'est-à-dire : $y = \frac{v_0}{\omega}\ \sin(\omega\ t)$.
• L'équation sur z donne : $x = A\ \cos(\omega\ t) + B\ \sin(\omega\ t)$ avec $\dot{z} = -\omega\ A\ \sin(\omega\ t) + \omega\ B\ \cos(\omega\ t)$. La condition initiale $\dot{z}(0) = 0$ impose $B = 0$; la condition initiale $z(0) = 0$ impose $A = 0$ c'est-à-dire : $z = 0$ (les mouvements à accélération radiale restent dans le plan déterminé par les conditions initiales...).
• Les équations de la trajectoire sont $z = 0$ et l'équation obtenue en éliminant t entre $x(t)$ et $y(t)$ dans le plan Oxy (correspondant à $z = 0$) : $\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - \left(\frac{\omega\ y}{v_0}\right)^2 = 1$.
• L'allure de la trajectoire est la suivante :



• C'est une ellipse, dont les sommets sur l'axe des x ont pour abscisses $x = \pm x_0$ et dont les sommets sur l'axe des y ont pour abscisses $y = \pm\ y_a$ (en posant $y_a = \frac{v_0}{\omega}$).

3.b. • La différence essentielle avec le mouvement précédent est que les trajectoires sont fermées et que le mouvement est périodique (la conservation de l'énergie impose que si le mobile revient à la même position, c'est avec la même vitesse, dont il continue de même qu'initialement).