

DYNAMIQUE - PRINCIPE FONDAMENTAL - exercices

I. Tir dans le vide

- Un canon éjecte ses obus avec une vitesse $v_0 = 200 \text{ m.s}^{-1}$. On suppose la pesanteur uniforme ; on néglige la résistance de l'air et la rotation de la Terre.
- 1. • Calculer la distance horizontale maximale x_m entre le canon et l'objectif pour qu'il soit possible d'atteindre un objectif situé au sommet d'une montagne de hauteur $h = 1000 \text{ m}$.
 ◇ indication : le plus simple est d'utiliser la "parabole de sûreté".
- 2. • On se place à une distance $\frac{x_m}{2}$; calculer les valeurs que peut prendre l'angle α du canon avec l'horizontale pour que l'objectif soit atteint.
- 3. • Calculer la vitesse de l'obus au moment où il touche l'objectif.

II. Recherche de trajectoire

1. a) Un point matériel M est soumis à une force (unique) $\vec{F} = k \overrightarrow{OM}$ où O est un point fixe et où k est une constante positive. Déterminer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) en fonction du temps, pour des conditions initiales : $x = x_0$; $y = 0$; $z = 0$; $\dot{x} = 0$; $\dot{y} = v_0$; $\dot{z} = 0$.
 ◇ indication : les solutions de l'équation $\ddot{x} - \lambda^2 x = 0$ sont de la forme $x(t) = A e^{\lambda t} + B e^{-\lambda t}$ où A et B sont deux constantes d'intégration, dépendant des conditions initiales.
 b) Montrer en particulier que la trajectoire est plane.
2. a) En éliminant le temps entre ces relations, déterminer l'équation de la trajectoire (dans le plan du mouvement, sinon dans l'espace à trois dimensions, il faut deux équations pour déterminer une courbe).
 ◇ indication : combiner les carrés des expressions $x(t)$ et $y(t)$.
 b) Tracer l'allure de la trajectoire. Quelle est la nature géométrique de cette trajectoire ?
3. a) Reprendre les questions précédentes dans le cas où $\vec{F} = -k \overrightarrow{OM}$ (avec $k > 0$).
 ◇ indication : les solutions de l'équation $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ sont de la forme $x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ où A et B sont deux constantes d'intégration, dépendant des conditions initiales.
 b) Quelle est la différence essentielle entre ce mouvement et le précédent ?