

DYNAMIQUE - PRINCIPE FONDAMENTAL - exercices

I. Tir dans le vide

- Un canon éjecte ses obus avec une vitesse $v_0 = 200 \text{ m.s}^{-1}$. On suppose la pesanteur uniforme ; on néglige la résistance de l'air et la rotation de la Terre.
- Calculer la distance horizontale maximale x_m entre le canon et l'objectif pour qu'il soit possible d'atteindre un objectif situé au sommet d'une montagne de hauteur $h = 1000 \text{ m}$.
◊ indication : le plus simple est d'utiliser la "parabole de sûreté".
 - On se place à une distance $\frac{x_m}{2}$; calculer les valeurs que peut prendre l'angle α du canon avec l'horizontale pour que l'objectif soit atteint.
 - Calculer la vitesse de l'obus au moment où il touche l'objectif.

II. Recherche de trajectoire

- a) Un point matériel M est soumis à une force (unique) $\vec{F} = k \overrightarrow{OM}$ où O est un point fixe et où k est une constante positive. Déterminer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) en fonction du temps, pour des conditions initiales : $x = x_0$; $y = 0$; $z = 0$; $\dot{x} = 0$; $\dot{y} = v_0$; $\dot{z} = 0$.
◊ indication : les solutions de l'équation $\ddot{x} - \lambda^2 x = 0$ sont de la forme $x(t) = A e^{\lambda t} + B e^{-\lambda t}$ où A et B sont deux constantes d'intégration, dépendant des conditions initiales.
- b) Montrer en particulier que la trajectoire est plane.
- a) En éliminant le temps entre ces relations, déterminer l'équation de la trajectoire (dans le plan du mouvement, sinon dans l'espace à trois dimensions, il faut deux équations pour déterminer une courbe).
◊ indication : combiner les carrés des expressions $x(t)$ et $y(t)$.
- b) Tracer l'allure de la trajectoire. Quelle est la nature géométrique de cette trajectoire ?
- a) Reprendre les questions précédentes dans le cas où $\vec{F} = -k \overrightarrow{OM}$ (avec $k > 0$).
◊ indication : les solutions de l'équation $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ sont de la forme $x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ où A et B sont deux constantes d'intégration, dépendant des conditions initiales.
- b) Quelle est la différence essentielle entre ce mouvement et le précédent ?