# DYNAMIQUE - FORCES - corrigé des exercices

## A. EXERCICES DE BASE

### I. Frottement proportionnel à la vitesse

1.a. • La relation fondamentale de la dynamique de translation peut s'écrire : $m\,\vec{a} = \vec{F} = -k\,\vec{v}$ . On en déduit que tout le mouvement se fait suivant la direction et le sens de la vitesse initiale et qu'algébriquement : $\dot{v} = -\lambda\, v$ ; par suite, compte tenu des conditions initiales : $v = v_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ .
• La distance parcourue en une durée $t$ est : $x(t) = \int_0^t v(t')\,dt' = \int_0^t v_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t'}\,dt' = \frac{v_0}{\lambda}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)$ .

1.b. • La distance totale que peut parcourir le point est : $D = \int_0^\infty v(t)\,dt = \frac{v_0}{\lambda}$ donc : $\lambda = \frac{v_0}{D} = 0{,}02\ \mathrm{s}^{-1}$ .

2. • D'une façon analogue : $\ell_i = \int_0^{t_i} v(t)\,dt = \frac{v_0}{\lambda}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t_i}\right)$ et $t_i = -\frac{\ln\left(1 - \frac{\lambda\,\ell_i}{v_0}\right)}{\lambda} = -\frac{\ln\left(1 - \frac{\ell_i}{D}\right)}{\lambda}$ .
• L'application numérique donne : $t_1 = 34{,}6\ \mathrm{s}$ ; $t_2 = 230\ \mathrm{s}$ .

3. • Puisque la force n'est pas constante, il faut calculer le travail infinitésimal sur un petit déplacement élémentaire, puis intégrer sur le déplacement total.
• D'après : $dW = \vec{F}\cdot d\overrightarrow{OM} = -k\,\vec{v}\cdot\vec{v}\,dt = -k\,v_0^2\,\mathrm{e}^{-2\lambda t}\,dt$ on obtient :
$$W_i = \int_0^{t_i} -k\,v_0^2\,\mathrm{e}^{-2\lambda t}\,dt = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2\left(\mathrm{e}^{-2\lambda t_i} - 1\right) .$$
◊ remarque : on retrouve le théorème de l'énergie cinétique.
• L'application numérique donne : $W_1 = -1{,}50\ \mathrm{mJ}$ ; $W_2 = -1{,}9998\ \mathrm{mJ} \approx -2{,}00\ \mathrm{mJ}$ (le travail limite n'est pas encore atteint, mais la différence est inférieure à l'incertitude de mesure).
◊ remarque : $W_i < 0$ car le travail du frottement est résistant.

### II. Frottement proportionnel au carré de la vitesse

1.a. • La relation fondamentale de la dynamique de translation peut s'écrire : $m\,\vec{a} = \vec{F} = -k\,v\,\vec{v}$ . On en déduit que tout le mouvement se fait suivant la direction et le sens de la vitesse initiale et qu'algébriquement : $\dot{v} = -\lambda\,v^2$ c'est-à-dire : $\frac{dv}{v^2} = -\lambda\,dt$ .
• Compte tenu des conditions initiales, on en obtient : $\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \lambda\,t$ puis $v(t) = \frac{v_0}{1 + v_0\,\lambda\,t}$ .
• La distance parcourue en une durée $t$ est : $x(t) = \int_0^t v(t')\,dt' = \int_0^t \frac{v_0}{1+v_0\,\lambda\,t'}\,dt' = \frac{\ln(1+v_0\,\lambda\,t)}{\lambda}$ .

1.b. • La distance D parcourue par le point est : $D = \int_0^T v(t)\,dt = \int_0^T \frac{v_0}{1+v_0\,\lambda\,t}\,dt = \frac{\ln(1+v_0\,\lambda\,T)}{\lambda}$ .
• Il est impossible d'expliciter λ à partir de cette relation, mais on peut par exemple résoudre implicitement par approximations successives. En partant de $\lambda_0 = \frac{1}{v_0\,T} = 0{,}010\ \mathrm{m}^{-1}$ (ordre de grandeur raisonnable) au numérateur, on obtient : $\lambda_1 = \frac{\ln(2)}{D} = 0{,}0139\ \mathrm{m}^{-1}$ ; avec cette valeur au numérateur, la seconde approximation donne : $\lambda_2 = \frac{\ln(2{,}39)}{D} = 0{,}0174\ \mathrm{m}^{-1}$ ; ...de même ensuite : $\lambda_{10} = 0{,}0250\ \mathrm{m}^{-1}$ ; la suite converge vers $\lambda = 0{,}0251\ \mathrm{m}^{-1}$ .
◊ remarque : cela peut bien sûr être fait automatiquement par une calculatrice.

2. • D'une façon analogue : $\ell_n = \int_0^{t_n} v(t)\,dt = \frac{\ln(1+v_0\,\lambda\,t_n)}{\lambda}$ et donc : $t_n = \frac{1}{\lambda\,v_0}\left(\mathrm{e}^{n\,\lambda D} - 1\right)$ .
• L'application numérique donne : $t_2 = 225\ \mathrm{s}$ .

3. • Puisque la force n'est pas constante, il faut calculer le travail infinitésimal sur un petit déplacement élémentaire, puis intégrer sur le déplacement total.

• D'après : $dW = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = -k\, v\, \vec{v} \cdot \vec{v}\, dt = -\frac{k\, v_0^3}{(1+v_0\, \lambda\, t)^3}\, dt$ on obtient :

$$W_n = \int_0^{t_n} -\frac{k\, v_0^3}{(1+v_0\, \lambda\, t)^3}\, dt = \frac{1}{2}\, m\, v_0^2 \left(\frac{1}{(1+v_0\, \lambda\, t_n)^2} - 1\right).$$

◊ remarque : on retrouve le théorème de l'énergie cinétique.

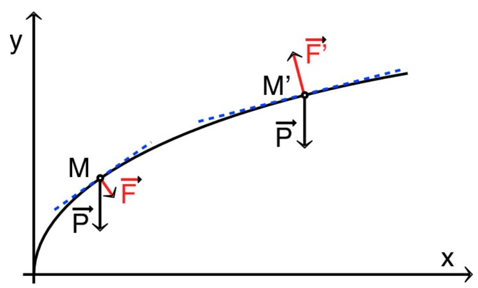
• L'application numérique donne : $W_2 = -1{,}99\ \mathrm{mJ}$ .

◊ remarque : $W_n < 0$ car le travail du frottement est résistant.

## B. EXERCICE D'APPROFONDISSEMENT

### III. Calcul d'une réaction

1. • La courbe est une parabole dont l'axe de symétrie est l'axe horizontal $Ox$ .




2.a. • Les variations du vecteur position $\overrightarrow{OM} = x\, \vec{u}_x + y\, \vec{u}_y$ correspondent à $d\overrightarrow{OM} = dx\, \vec{u}_x + dy\, \vec{u}_y$ et donc le long de la courbe : $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dx} = \vec{u}_x + \frac{dy(x)}{dx}\, \vec{u}_y = \vec{u}_x + \frac{\alpha}{\sqrt{2\,\alpha\, x}}\, \vec{u}_y = \vec{u}_x + \frac{\alpha}{y}\, \vec{u}_y$ est forcément tangent.

2.b. • Pour obtenir un vecteur tangent unitaire (vers la droite, donc ascendant), il suffit de diviser le vecteur précédent par sa norme, ce qui peut s'écrire : $\vec{u}_T = \frac{y\, \vec{u}_x + \alpha\, \vec{u}_y}{\sqrt{y^2+\alpha^2}}$ .

• Pour obtenir un vecteur unitaire normal (vers le bas), on peut appliquer une rotation de $-\frac{\pi}{2}$ , ce qui change $\vec{u}_x$ en $-\vec{u}_y$ et $\vec{u}_y$ en $\vec{u}_x$ : $\vec{u}_N = \frac{-y\, \vec{u}_y + \alpha\, \vec{u}_x}{\sqrt{y^2+\alpha^2}} = \frac{\alpha\, \vec{u}_x - y\, \vec{u}_y}{\sqrt{\alpha^2+y^2}}$ .

2.c. • L'expression générale de la vitesse est : $\vec{v} = \dot{\overrightarrow{OM}} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \left(\vec{u}_x + \frac{\alpha}{y}\, \vec{u}_y\right) \dot{x}$ .

• Avec $\dot{y} = \frac{\alpha}{y}\, \dot{x}$ l'expression générale de l'accélération est : $\ddot{\overrightarrow{OM}} = \left(\vec{u}_x + \frac{\alpha}{y}\, \vec{u}_y\right) \ddot{x} + \left(-\frac{\alpha}{y^2}\, \dot{y}\, \vec{u}_y\right) \dot{x}$ c'est-à-dire : $\vec{a} = \ddot{\overrightarrow{OM}} = \left(\vec{u}_x + \frac{\alpha}{y}\, \vec{u}_y\right) \ddot{x} - \frac{\alpha^2}{y^3}\, \dot{x}^2\, \vec{u}_y$ .

3.a. • La relation fondamentale de la dynamique peut s'écrire : $m\, \vec{a} = m\, \vec{g} + \vec{F}$ donc : $\vec{F} = m\, \vec{a} - m\, \vec{g}$ .

• La projection sur la normale donne : $\overline{F} = \left(-m\, \frac{\alpha^2}{y^3}\, \dot{x}^2 + m\, g\right) \vec{u}_y \cdot \vec{u}_N = m \,.\left(\frac{\alpha^2}{y^3}\, \dot{x}^2 - g\right) \frac{y}{\sqrt{\alpha^2+y^2}}$ .

◊ remarque : il faut raisonner algébriquement, car on ne connaît pas a priori le sens de $\vec{F}$ .

3.b. • En l'absence de frottement, la réaction est normale et ne travaille pas ; le théorème de l'énergie mécanique peut s'écrire : $\frac{1}{2}\, m\, v^2 + m\, g\, y = \frac{1}{2}\, m\, v_0^2$ donc : $v^2 = v_0^2 - 2\, g\, y$ .

• D'après ce qui précède : $v^2 = \left(1 + \frac{\alpha^2}{y^2}\right) \dot{x}^2$ et par conséquent : $\dot{x}^2 = \frac{v_0^2 - 2\, g\, y}{1+\frac{\alpha^2}{y^2}}$ .

3.c. • On en déduit par substitution : $\overline{F} = m \,.\left(\frac{\alpha^2}{y}\, \frac{v_0^2 - 2\, g\, y^2}{\alpha^2+y^2} - g\right) \frac{y}{\sqrt{\alpha^2+y^2}} = m\, \frac{\alpha^2\, v_0^2 - (3\,\alpha^2+y^2)\, g\, y}{(\alpha^2+y^2)^{3/2}}$ .

3.d. • On constate que, peu après le départ ($y$ petit) : $\overline{F} \approx m \, \frac{v_0^2 - 3\, g\, y}{\alpha}$ ; la réaction est dans le sens de $\vec{u}_N$ , c'est-à-dire vers la droite : pour déplacer le mobile le long du rail, il faut qu'une force s'exerce vers la droite ; or, cela ne peut pas être le poids (vertical).

• Au contraire, lorsque le mobile monte “suffisamment”, soit $(3\,\alpha^2 + y^2)\, g\, y > \alpha^2\, v_0^2$ , la réaction est dans le sens contraire de $\vec{u}_N$ , c'est-à-dire vers la gauche : lorsqu'il monte, le mobile finit par s'arrêter et redescendre, mais si on raisonne sur la projection horizontale du mouvement, il faut pour cela qu'une force s'exerce vers la gauche ; or, cela ne peut pas être le poids (vertical).

◊ remarque : on peut préciser avec les notations simplifiées $y^3 + 3\,\alpha^2\, y > \beta = \frac{\alpha^2\, v_0^2}{g}$ ; on obtient ainsi $y > y_0 = \eta - \frac{1}{\eta} > 0$ avec $\eta = \frac{\alpha}{2}\left(4\,\beta + 4\sqrt{4 + \beta^2}\right)^{1/3}$.

◊ remarque : la tendance intuitive à s'imaginer que l'action de $\vec{F}$ est principalement de compenser le poids, donc vers le haut, est fausse ; ceci n'est valable que dans des conditions “assez” voisines d'une situation d'équilibre, donc c'est à peu près plausible au voisinage de la position la plus haute du mouvement, mais c'est faux au début.