DYNAMIQUE - FORCES - exercices

A. EXERCICES DE BASE

I. Frottement proportionnel à la vitesse

• Un point matériel de masse m est lancé sur une droite avec une vitesse initiale $v_0 = 2{,}0\ \mathrm{m.s^{-1}}$. La seule force qui lui est appliquée est un frottement $\vec{f} = -k\,\vec{v}$ où k est une constante positive et où $\vec{v}$ désigne sa vitesse. On note par la suite $\lambda = \frac{k}{m}$ pour simplifier.

1. a) Exprimer la distance $x(t)$ parcourue en fonction du temps.
b) Le point parcourt au total une distance $D = 100\ \mathrm{m}$; en déduire λ.
◊ indication : les solutions de l'équation différentielle $\dot{v} = -\lambda\, v$ sont de la forme $v(t) = A\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ où A est une constante d'intégration dépendant des conditions initiales.

2. • Calculer la durée $t(\ell)$ nécessaire pour parcourir une distance $\ell < D$. Effectuer le calcul numérique pour $\ell_1 = 50\ \mathrm{m}$ puis pour $\ell_2 = 99\ \mathrm{m}$.

3. • Calculer littéralement, puis numériquement dans les deux cas précédents, le travail de la force de frottement lors du parcours de la distance ℓ pour une masse $m = 1{,}0\ \mathrm{g}$.

II. Frottement proportionnel au carré de la vitesse

• Un point matériel de masse m est lancé sur une droite avec une vitesse initiale $v_0 = 2{,}0\ \mathrm{m.s^{-1}}$. La seule force qui lui est appliquée est un frottement $\vec{f} = -k\,v\,\vec{v}$ où k est une constante positive et où $\vec{v}$ désigne sa vitesse. On note par la suite $\lambda = \frac{k}{m}$ pour simplifier.

1. a) Exprimer la vitesse $v(t)$ puis la distance $x(t)$ parcourue en fonction du temps.
b) Le point parcourt en $T = 50\ \mathrm{s}$ une distance $D = 50\ \mathrm{m}$; en déduire λ.
◊ indication : pour déduire le déplacement de la vitesse, on peut montrer que celle-ci est solution de l'équation à variables séparées $\frac{dv}{v^2} = -\lambda\, dt$ (qu'on peut intégrer de part et d'autre de l'égalité).
◊ indication : après intégration, la relation $x = x(t)$ obtenue ne peut pas être résolue algébriquement par rapport à λ, mais on peut la résoudre numériquement (par approximations successives).

2. • Calculer littéralement la durée t_n nécessaire pour parcourir $\ell_n = n\,D$ avec n entier. Effectuer le calcul numérique pour $\ell_2 = 2\,D$.

3. • Calculer littéralement, puis numériquement pour $\ell_2 = 2\,D$, le travail de la force de frottement lors du parcours de la distance ℓ_n pour $m = 1{,}0\ \mathrm{g}$.

B. EXERCICE D'APPROFONDISSEMENT

III. Calcul d'une réaction

1. • Dans un plan vertical, on considère un axe Ox horizontal et un axe Oy vertical ascendant. Un point matériel M de masse m peut glisser sans frottement le long d'un rail en forme de portion de parabole d'équation $y = \sqrt{2\,\alpha\, x}$ où α est une constante positive. Tracer l'allure de cette courbe.

2. a) Pour connaître les aspects cinématiques du mouvement sur cette courbe, calculer l'expression du vecteur $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dx}$ et justifier qu'il est tangent au mouvement.

b) En déduire les expressions suivantes du vecteur unitaire tangent $\vec{u}_T = \frac{y\,\vec{u}_x + \alpha\,\vec{u}_y}{\sqrt{y^2+\alpha^2}}$ et du vecteur unitaire normal $\vec{u}_N = \frac{\alpha\,\vec{u}_x - y\,\vec{u}_y}{\sqrt{\alpha^2+y^2}}$.

◊ indication : pour obtenir un vecteur normal, on peut utiliser l'effet d'une rotation de $-\frac{\pi}{2}$ sur les vecteurs de base $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$.

c) Calculer les expressions générales de la vitesse $\dot{\overrightarrow{OM}}$ et de l'accélération $\ddot{\overrightarrow{OM}}$ le long de cette courbe.

3. a) Le point M est lancé en O avec une vitesse initiale de norme v_0 . D'après la relation fondamentale de la dynamique, en projetant sur la direction normale au rail, montrer que la réaction $\vec{F}$ exercée par le rail sur M a une composante (algébrique) : $\bar{F} = m\,.\left(\frac{\alpha^2}{y^3}\,\dot{x}^2 - g\right)\frac{y}{\sqrt{\alpha^2+y^2}}$.

b) D'après le théorème de l'énergie mécanique, exprimer $\dot{x}^2$ en fonction de y .

c) En déduire l'expression de la composante de la réaction : $\bar{F} = m\,\frac{\alpha^2\,v_0^2 - (3\,\alpha^2+y^2)\,g\,y}{(\alpha^2+y^2)^{3/2}}$.

d) Interpréter l'évolution du signe de cette composante (sens de $\vec{F}$) en fonction de la position de M .