M. VIII - DYNAMIQUE ; RÉFÉRENTIELS NON GALILÉENS

1. Notion de force d'inertie

• Soient $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ un repère d'un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, et $(O', \overrightarrow{u'_x}, \overrightarrow{u'_y}, \overrightarrow{u'_z})$ un repère d'un référentiel $\mathcal{R}'$ non galiléen.

L'accélération d'un point par rapport à $\mathcal{R}$ est liée à celle par rapport à $\mathcal{R}'$:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c}$$

avec :

$$\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{OO'}^{\bullet\bullet} + x' \, \overrightarrow{u'_x}^{\bullet\bullet} + y' \, \overrightarrow{u'_y}^{\bullet\bullet} + z' \, \overrightarrow{u'_z}^{\bullet\bullet}$$

accélération d'entraînement (accélération du "point coïncidant") ;

$$\overrightarrow{a_c} = 2 \left(x'^{\bullet} \, \overrightarrow{u'_x}^{\bullet} + y'^{\bullet} \, \overrightarrow{u'_y}^{\bullet} + z'^{\bullet} \, \overrightarrow{u'_z}^{\bullet}\right)$$

accélération complémentaire (ou "de Coriolis").

Le principe fondamental de la dynamique, par rapport à $\mathcal{R}$, peut donc s'écrire sous la forme : $\sum_{\mathcal{R}} \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = m\vec{a}' + m\overrightarrow{a_e} + m\overrightarrow{a_c}$.

On peut alors écrire par rapport à $\mathcal{R}'$: $\sum_{\mathcal{R}'} \vec{F} = \frac{d\vec{p}'}{dt} = m\vec{a}'$ à condition d'ajouter des "forces d'inertie" :

$$\sum_{\mathcal{R}'} \vec{F} = \sum_{\mathcal{R}} \vec{F} + \vec{f_e} + \vec{f_c} \ ;$$

$\vec{f_e} = - m\overrightarrow{a_e}$: force d'inertie d'entraînement ;

$\vec{f_c} = - m\overrightarrow{a_c}$: force d'inertie complémentaire (ou "de Coriolis").

◊ remarque : ceci montre le caractère "arbitraire" des "forces" ; elles dépendent du référentiel s'il n'est pas galiléen.

2. Cas d'une translation

• Pour une translation, les vecteurs de base $\vec{u'_x}$, $\vec{u'_y}$ et $\vec{u'_z}$ sont constants, par suite : $\vec{a_e} = \overrightarrow{OO'}^{\bullet\bullet}$ et $\vec{a_c} = \vec{0}$.

• Ainsi, le passager qui raisonne dans le référentiel $\mathcal{R}'$ d'une voiture qui ralentit se sent entraîné vers le pare-brise par une force d'inertie $\vec{f_e} = -m\,\vec{a_e}$.

Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ lié au sol, c'est le pare-brise qui ralentit et qui est rattrapé par le passager (celui-ci continue d'un mouvement uniforme).

• Pour un passager dans une cabine en "chute libre" dans une champ de pesanteur uniforme, l'accélération de la cabine est : $\vec{a_e} = \vec{g}$.

Le passager qui raisonne dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de la cabine a l'impression de subir une force d'inertie d'entraînement $\vec{f_e} = -m\,\vec{a_e} = -m\,\vec{g}$ qui compense son poids : $m\,\vec{a'} = m\,\vec{g} - m\,\vec{a_e} = \vec{0}$. Cette situation est appelée "impesanteur".

◊ remarque : dans une cabine spatiale en orbite, il n'y a pas rigoureusement impesanteur, d'une part parce qu'il y a toujours plus ou moins de rotation, d'autre part parce que le champ de pesanteur $\vec{g}$ n'est pas tout à fait uniforme.

◊ remarque : l'équivalence entre "masse inerte" et "masse pesante" permet de réinterpréter la pesanteur comme une force d'inertie si on définit un système de repérage approprié (théorie de la relativité générale).

📖 *exercice n° I.*

3. Cas d'une rotation

• Pour une rotation de vitesse angulaire $\vec{\omega}$:

$$\vec{v_e} = \overrightarrow{OO'}^{\bullet} + x'\,\vec{u'_x}^{\bullet} + y'\,\vec{u'_y}^{\bullet} + z'\,\vec{u'_z}^{\bullet} = \overrightarrow{OO'}^{\bullet} + \vec{\omega}\times\overrightarrow{O'M} = \vec{\omega}\times\overrightarrow{OM} \;;$$

$$\vec{a_e} = (\vec{\omega}^{\bullet})\times\overrightarrow{OM} + \vec{\omega}\times\vec{v_e} = (\vec{\omega}^{\bullet})\times\overrightarrow{OM} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\overrightarrow{OM}) \;;$$

$$\vec{a_c} = 2\,\vec{\omega}\times\vec{v'}.$$

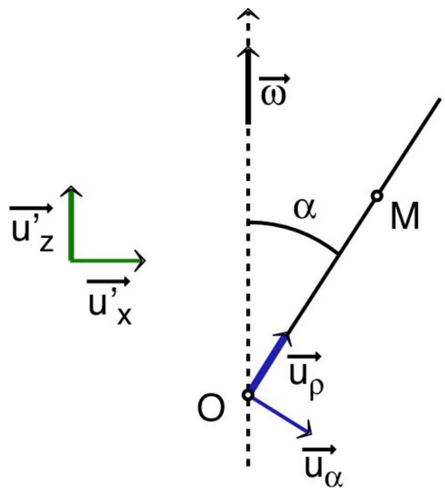
Ainsi, pour un point fixe par rapport à $\mathcal{R}'$ en rotation à vitesse angulaire $\vec{\omega}$ constante, on obtient une “force centrifuge” (force d’inertie d’entraînement) $\vec{f_e} = -m\,\vec{a_e} = -m\ \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\overrightarrow{OM}) = m\omega^2 r\ \vec{u_r}$ (où r est la distance entre le point M et l’axe de rotation).

◊ remarque : par contre, si le point M n’est pas fixe par rapport à $\mathcal{R}'$, il faut ajouter la force d’inertie complémentaire : $\vec{f_c} = -2m\,\vec{\omega}\times\vec{v}'$.

• Considérons par exemple un anneau M, mobile sans frottement sur une tige oblique en rotation à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ constante :

Par rapport au référentiel $\mathcal{R}'$ associé à la tige : $m\,\vec{a}' = \vec{P} + \vec{R} + \vec{f_e} + \vec{f_c}$ avec $\vec{f_e} = -m\ \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\overrightarrow{OM}) = m\omega^2 x'\ \vec{u'_x}$ et $\vec{f_c} = -2m\,\vec{\omega}\times\vec{v}'$.

Afin d’exprimer plus simplement les différentes quantités concernées, il est alors pratique d’utiliser dans le plan x’Oz’ une base $(\vec{u_\rho}, \vec{u_\alpha})$ avec $\vec{u_\rho}$ orienté selon $\overrightarrow{OM}$.



On peut ainsi écrire : $\overrightarrow{OM} = \rho\ \vec{u_\rho}$;

$\vec{v}' = \dot{\rho}\ \vec{u_\rho}$; $\vec{a}' = \ddot{\rho}\ \vec{u_\rho}$;

$\vec{f_e} = m\omega^2\rho\,\sin(\alpha)\,[\sin(\alpha)\,\vec{u_\rho} + \cos(\alpha)\,\vec{u_\alpha}]$;

$\vec{f_c} = -2m\,\vec{\omega}\times\vec{v}' = -2m\omega\dot{\rho}\,\sin(\alpha)\,\vec{u'_y}$.

• En projetant alors la relation de la dynamique sur la direction de $\vec{u_\rho}$, on obtient l’équation du mouvement : $\ddot{\rho} - \omega^2\sin^2(\alpha)\,\rho = -g\cos(\alpha)$.

Une solution particulière de l’équation correspond à l’équilibre relatif (immobilité dans $\mathcal{R}'$) : $\ddot{\rho} = 0$ et $\rho = \rho_e = \dfrac{g\cos(\alpha)}{\omega^2\sin^2(\alpha)}$.

En posant $\lambda = \omega\sin(\alpha)$, on peut alors écrire la solution générale de l’équation sans second membre sous la forme : $\rho = A\,e^{\lambda t} + B\,e^{-\lambda t}$.

Si on suppose que l'anneau part de la position ρ_0 avec une vitesse nulle, on obtient finalement la solution : $\rho = \rho_e + (\rho_0\text{-}\rho_e)\ \dfrac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2} = \rho_e + (\rho_0\text{-}\rho_e)\ \mathrm{ch}(\lambda t)$.

◊ remarque : pour $\rho_0 < \rho_e$ l'anneau part vers le bas, et pour $\rho_0 > \rho_e$ il part vers le haut ; l'équilibre correspond donc à un équilibre instable.

◊ remarque : ce mouvement de l'anneau provient du fait que la tige tourne par rapport à un référentiel galiléen ; si on laisse la tige fixe dans $\mathcal{R}$ et qu'on fait seulement tourner un observateur dans $\mathcal{R}'$, celui-ci voit l'anneau tomber jusqu'en O (en chute “guidée” par la tige) quelle que soit la position initiale.

• En projetant la relation de la dynamique sur la direction du plan perpendiculaire à $\overrightarrow{u_\rho}$, on en déduit la réaction :

$$\vec{R} = -\ mg\ \sin(\alpha)\,\overrightarrow{u_\alpha}\ -\ m\omega^2\rho\ \sin(\alpha)\cos(\alpha)\,\overrightarrow{u_\alpha}\ +\ 2m\omega\dot{\rho}\ \sin(\alpha)\,\overrightarrow{u'_y}\ .$$

◊ remarque : en général, la réaction de la tige n'est pas dans le plan du dessin (à cause du mouvement dans $\mathcal{R}'$).

📖 *exercices n° II, III et IV.*

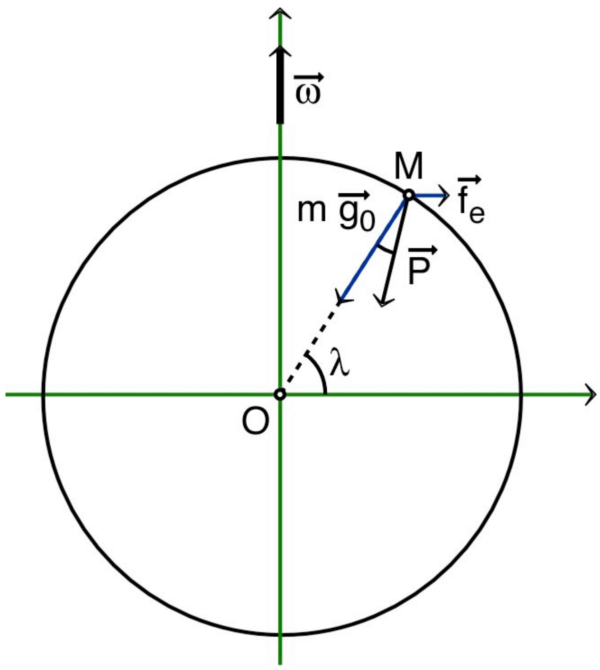
4. Effets de rotation de la Terre

4.1. Influence sur le poids

• La force gravitationnelle exercée par la Terre (de masse M_T) sur un point matériel M (de masse m) a pour expression : $\vec{F} = -\mathcal{G}\ \dfrac{M_T m}{r^2}\ \overrightarrow{u_r}$ (loi de Newton, analogue à celle de Coulomb décrivant la force électrostatique).

Au voisinage d'un point donné du sol, on peut l'écrire sous la forme $\vec{F} = m\,\overrightarrow{g_0}$ avec $\overrightarrow{g_0} = -\mathcal{G}\ \dfrac{M_T}{R^2}\ \overrightarrow{u_r}$ (où R est le rayon terrestre).

• Pour l'étude du mouvement d'un satellite, par rapport à un référentiel galiléen, on peut appeler "poids" cette force de gravitation.



Par contre, sur Terre (dans le référentiel terrestre non-galiléen), le "poids" est par définition $\vec{P} = \vec{F} + \vec{f_e}$ incluant la "force centrifuge" $\vec{f_e}$ (force d'inertie d'entraînement de rotation).

La vitesse angulaire d'un tour par jour ($\omega = 7{,}292.10^{-5}$ rad.s^{-1}) cause une force centrifuge $f_e = m\omega^2 R\cos(\lambda)$ où λ est la latitude.

En exprimant $\vec{P} = \vec{F} + \vec{f_e}$ sur la base ($\vec{u_r}, \vec{u_\theta}$), on en déduit une "déviation" α de la verticale (direction du poids) par rapport à la direction radiale :

$$\tan(\alpha) = \frac{\omega^2 R \sin(\lambda)\cos(\lambda)}{g_0 - \omega^2 R\cos^2(\lambda)}.$$

◊ remarque : à l'équateur, où il est le plus grand, le terme correctif sur P est : $\omega^2 R = 0{,}034$ m.s^{-2} ce qui n'est pas toujours négligeable ; en outre le calcul exact de $\vec{P}$ se complique d'un effet d'aplatissement de la Terre aux pôles.

◊ remarque : la rotation correspond à un tour par jour sidéral (86164 s).

4.2. Déviation de la chute libre vers l'est

• Pour l'étude des mouvements, le terme d'inertie complémentaire intervient aussi ; il provoque par exemple une déviation vers l'est de la chute libre pour un point matériel de vitesse initiale nulle par rapport au référentiel $\mathscr{R}'$.

◊ remarque : on considère ici $\vec{g} \approx \vec{g_0}$ de direction radiale (la correction précédente n'interviendrait qu'au second ordre).

• La relation de la dynamique peut s'écrire par rapport à $\mathcal{R}'$:

$$m\,\overrightarrow{a'} = m\,\vec{g} - 2m\,\vec{\omega}\times\overrightarrow{v'} \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \overrightarrow{v'}^{\bullet} + 2\,\vec{\omega}\times\overrightarrow{v'} = \vec{g}$$

(équation analogue à celle avec force magnétique de Lorentz).

Toutefois, la force d'inertie étant faible ($\overrightarrow{v'}$ faible), le mouvement vertical est peu modifié et on peut utiliser un “calcul perturbatif” :

$$r' \approx r'_0 - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{(avec g quasi uniforme)} \quad ; \quad r'^{\bullet} \approx -gt \quad ;$$

$$\overrightarrow{v'} \approx -gt\ \overrightarrow{u_r} \quad ; \quad \overrightarrow{f_c} \approx 2m\omega gt\cos(\lambda)\,\overrightarrow{u_\phi}.$$

Dans un référentiel terrestre cartésien, cela donne : $z'' = r' - R = z''_0 - \frac{1}{2}gt^2$ avec une force d'inertie complémentaire : $\overrightarrow{f_c} \approx 2m\omega gt\cos(\lambda)\,\overrightarrow{u_\phi} = m\ x''^{\bullet\bullet}\ \overrightarrow{u''_x}$.

On en déduit la déviation horizontale (vers l'est) : $x'' \approx \frac{1}{3}\omega gt^3\cos(\lambda)$.

◊ remarque : compte tenu de $t \approx \sqrt{\frac{2z''_0}{g}}$ à l'arrivée au sol, on obtient une déviation : $x'' \approx \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\omega}{\sqrt{g}}\ z''^{3/2}_0\cos(\lambda)$; ainsi pour $z''_0 \approx 300$ m et $\lambda \approx 50°$ (tour Eiffel) on obtient : $x'' \approx 7{,}3$ cm.

📖 *exercices n° V, VI et VII.*

4.3. Effets de marée

• Les marées sont principalement associées à la rotation du système Terre-Lune. Dans le référentiel d'origine G en translation circulaire autour de I, l'eau du côté proche de la Lune subit une attraction de norme supérieure à celle de la “force centrifuge” $-m\,\overrightarrow{a_G}$ et inversement pour l'eau du côté opposé.

• La rotation de la Terre sur elle même fait ainsi que l'eau passe deux fois par jour dans les zones où elle tend à s'écarter du sol. Les marées sont toutefois surtout amplifiées par résonance (donc avec déphasage) ; l'effet dépend de la salinité de l'eau et de la grandeur du volume oscillant.

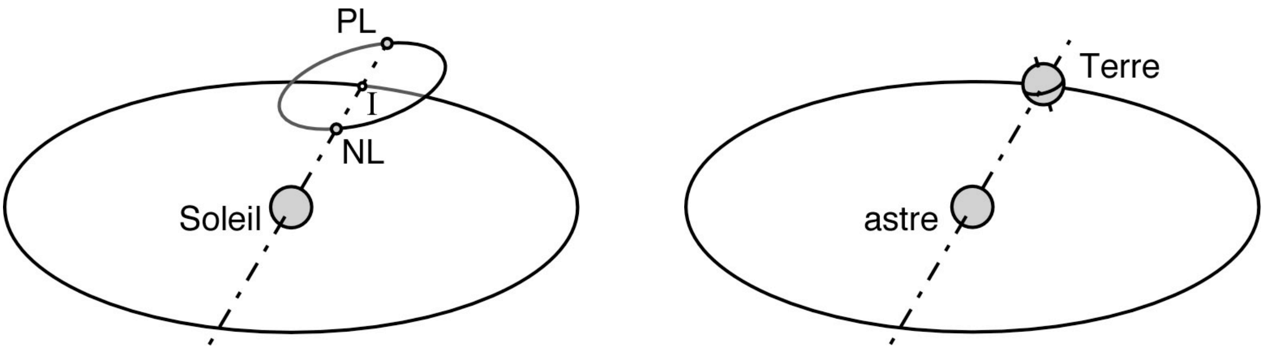
De ce fait, on n'observe pas de marée dans les lacs ; la méditerranée subit des marées plutôt faibles ; l'océan Pacifique résonne plutôt à une marée par jour, alors que l'océan Atlantique résonne plutôt à deux marées par jour.

◊ remarque : l'effet de marée est de plusieurs mètres sur les mers, mais il y a aussi un effet de marée sur la croûte terrestre, de l'ordre de 20 cm.

• Le soleil exerce aussi une influence sur les marées ; cette influence est toutefois du second ordre, bien que le soleil soit plus massif, car la distance est plus grande donc la différence des forces est en proportion plus faible.

Les marées sont plus fortes quand la Lune et le Soleil sont alignés avec la Terre (pleine lune et nouvelle lune, périodicité 14,8 jours).

• Les plans de rotation de la Terre, respectivement autour du Soleil et autour du centre d'inertie Terre-Lune, ne sont pas confondus. Les marées sont donc encore plus fortes quand l'alignement est meilleur (périodicité 173,3 jours) : il se produit dans la direction d'intersection des plans de rotation (condition dans lesquelles se produisent les éclipses).



Selon les conditions locales, les effets de résonance sont aussi renforcés aux équinoxes (périodicité 182,6 jours) et aux “équilunes” (périodicité 9,3 ans) : lorsque le plan de l'équateur est aligné avec l'un ou l'autre des plans de rotation précédents, les effets des deux côtés de la Terre se cumulent mieux car ils sont dans le même alignement (cela favorise la résonance à deux marées par jour).