

Conditions de décrochage d'un pendule à ressort en oscillations forcées

la condition d'équilibre en l'absence d'oscillations peut s'écrire (avec m et g renormalisés) :

$$k \cdot (z_{A0} - z_0) - l_0 = m \cdot g$$

la condition de tension lors des oscillations peut s'écrire :

$$k \cdot (z_A - z) - l_0 > 0$$

avec les variations :

$$z_A = z_{A0} + Z_{Am} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$z = z_0 + Z_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$$

ceci correspond à :

$$m \cdot g + k \cdot ((Z_{Am} - Z_m \cdot \cos(\phi)) \cdot \cos(\omega \cdot t) + Z_m \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(\omega \cdot t)) > 0$$

$$\frac{m \cdot g}{k} + \sqrt{(Z_{Am} - Z_m \cdot \cos(\phi))^2 + (Z_m \cdot \sin(\phi))^2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi) > 0$$

pour qu'il y ait contact à tout instant, la condition à respecter est :

$$\frac{m \cdot g}{k} > \sqrt{(Z_{Am} - Z_m \cdot \cos(\phi))^2 + (Z_m \cdot \sin(\phi))^2}$$

en outre les oscillations forcées correspondent aux variations :

$$Z_m = Z_{Am} \cdot \frac{\omega \theta^2}{\sqrt{(\omega \theta^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \alpha \cdot \omega)^2}}$$

$$\cos(\phi) = \frac{\omega \theta^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega \theta^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \alpha \cdot \omega)^2}}$$

$$\sin(\phi) = \frac{-2 \cdot \alpha \cdot \omega}{\sqrt{(\omega \theta^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \alpha \cdot \omega)^2}}$$

compte tenu de $k = m \cdot \omega \theta^2$ on en déduit la condition :

$$\frac{g}{Z_m} > \sqrt{\frac{((2 \cdot \alpha \cdot \omega)^2 - \omega^2 \cdot (\omega \theta^2 - \omega^2))^2 + \omega \theta^4 \cdot (2 \cdot \alpha \cdot \omega)^2}{(\omega \theta^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \alpha \cdot \omega)^2}}$$

on peut remarquer qu'au voisinage de la résonance ($\omega \approx \omega_0$) et à faible amortissement ($\alpha \ll \omega_0$) :

$$\sqrt{\frac{((2 \cdot \alpha \cdot \omega)^2 - \omega^2 \cdot (\omega \theta^2 - \omega^2))^2 + \omega \theta^4 \cdot (2 \cdot \alpha \cdot \omega)^2}{(\omega \theta^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \alpha \cdot \omega)^2}} \approx \omega \theta^2 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right) \approx \omega^2$$

(la condition limite est équivalente à celle obtenue pour un point matériel simplement posé sur un plateau oscillant)

on peut visualiser la courbe limite

$$Z_d := \frac{g}{\sqrt{\frac{((2 \cdot \alpha \cdot \omega)^2 - \omega^2 \cdot (\omega \theta^2 - \omega^2))^2 + \omega \theta^4 \cdot (2 \cdot \alpha \cdot \omega)^2}{(\omega \theta^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \alpha \cdot \omega)^2}}} :$$

$$Zds := \frac{g}{\omega^2} :$$

$$g := 7.69 :$$

$$m := 0.0876 :$$

$$k := 19.68 :$$

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}$$

14.98858013

(1)

$$\alpha := 2.32 :$$

$$c1 := \text{plot}(Zds, \omega = 0 \dots 35, y = 0 \dots 0.1, \text{color} = \text{green}, \text{linestyle} = \text{dash}) :$$

$$c2 := \text{plot}(Zd, \omega = 0 \dots 35, y = 0 \dots 0.1, \text{color} = \text{red}) :$$

$$\text{plots}[\text{display}](\{c1, c2\})$$

