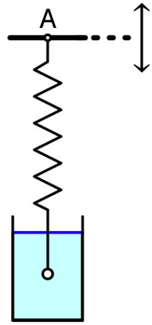
M. V - DYNAMIQUE - OSCILLATIONS FORCÉES

1. Équation du mouvement



• On considère un pendule à ressort vertical avec amortissement visqueux, mis en oscillations forcées (de pulsation ω quelconque) par un mouvement sinusoïdal permanent du support : $z_A = z_{A0} + Z_{Am} \cos(\omega\, t)$.

En posant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $\alpha = \frac{\lambda}{2\, m}$ et en prenant pour origine la position d'équilibre obtenue pour $z_A = z_{A0}$ l'équation du mouvement peut s'écrire :

$$\ddot{z} + 2\, \alpha\, \dot{z} + \omega_0^2\, z = \omega_0^2\, Z_{Am} \cos(\omega\, t) .$$

◊ remarque : l'effet du fluide est décrit par $m' = m + m_e$ et $\vec{g}' = \vec{g}\, \frac{m-m_d}{m+m_e}$ (avec m_d pour le fluide "déplacé" et m_e pour le fluide "oscillant").

• D'une façon analogue à ce qui a été étudié en électricité, la solution générale de cette équation est la somme :

◊ d'un régime transitoire amorti, solution de l'équation homogène ;

◊ d'oscillations forcées, solution particulière de l'équation complète.

Bien que le régime transitoire soit moins vite amorti en mécanique qu'en électricité, on se limite ici à l'étude du régime forcé qu'on cherche sous la forme : $z = Z_m \cos(\omega\, t + \phi)$; donc en notations complexes :

$$\underline{z} = Z_m\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \phi)} = \underline{Z_m}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{Z_m} = Z_m\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi} .$$

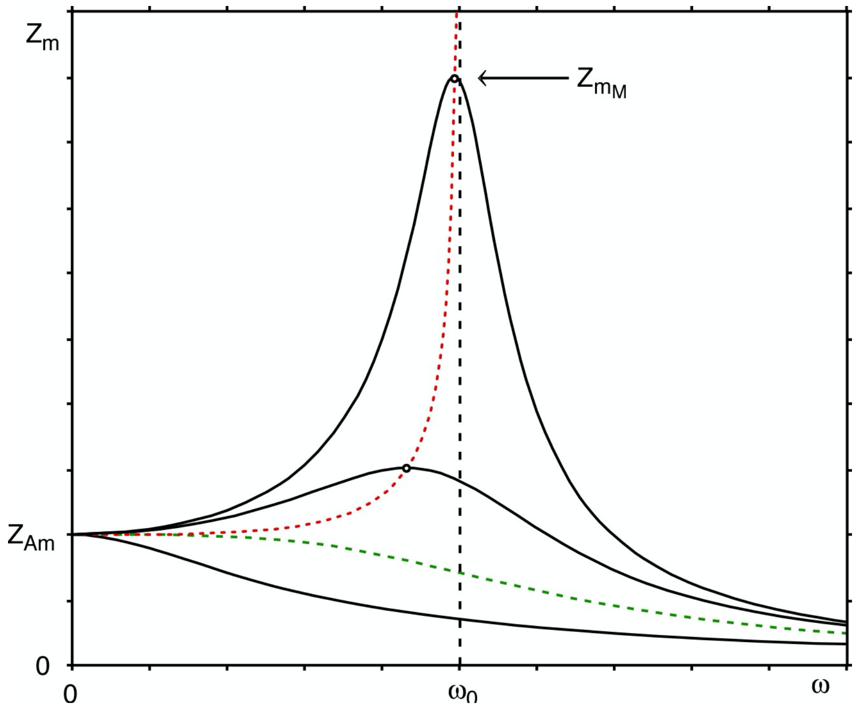
◊ remarque : l'amplitude Z_m n'est pas une impédance… (l'analogie électromécanique permet de définir des "impédances" en mécanique ; par exemple λ).

◊ remarque : l'analogue électromécanique de z est la charge $q = C\, u_C$ du condensateur ; les résultats sont donc un peu différents de ceux obtenus pour le courant $i = \frac{u_R}{R}$ dans un circuit "RLC" (il faudrait utiliser la variable $\dot{z}$).

• L'équation $\ddot{z} + 2\,\alpha\,\dot{z} + \omega_0^2\,z = \omega_0^2\,Z_{Am}\,\cos(\omega\,t)$ correspond à l'équation complexe $(-\omega^2 + 2\,\mathrm{j}\,\alpha\,\omega + \omega_0^2\,)\,\underline{Z}_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \omega_0^2\,Z_{Am}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ d'où on déduit par identification : $\underline{Z}_m = \frac{Z_{Am}\,\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\,\mathrm{j}\,\alpha\,\omega}$ c'est-à-dire :

$$Z_m = \frac{Z_{Am}\,\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\,\alpha\,\omega)^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\phi) = -\frac{2\,\alpha\,\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\,\alpha\,\omega)^2}}\,.$$

2. Amplitude du mouvement et résonance



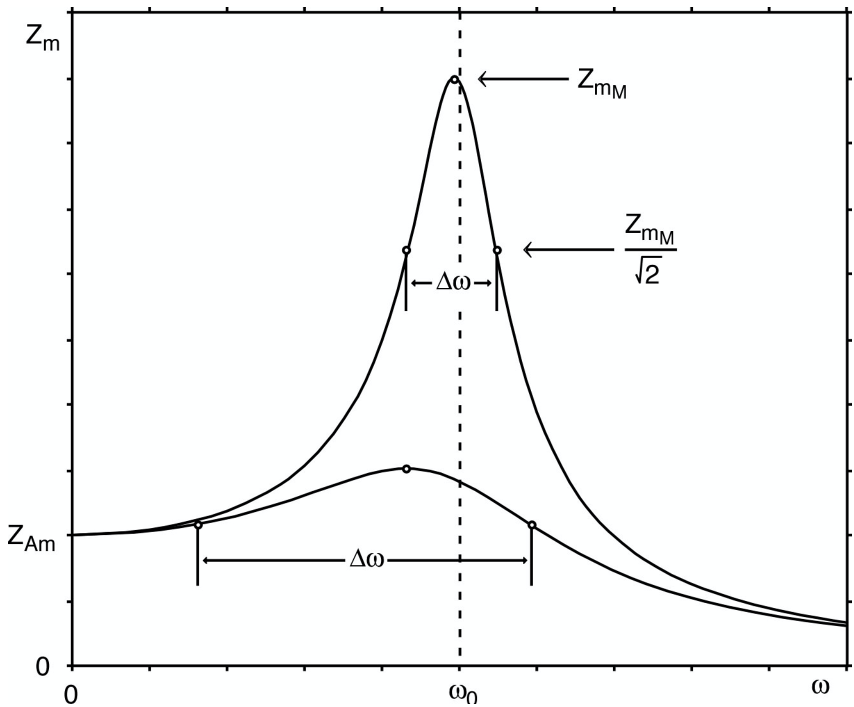
• La variation de $Z_m(\omega)$ donne une résonance si l'amortissement n'est pas trop grand, mais avec un maximum pour $\omega_r \neq \omega_0$.

En fait : $\frac{dZ_m}{d\omega} = \frac{2\,Z_{Am}\,\omega_0^2\,\omega\,.(\omega_0^2-\omega^2-2\,\alpha^2)}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\,\alpha\,\omega)^2\right]^{3/2}}$ s'annule :

◊ pour $\omega = 0$: tangente horizontale avec $Z_m(0) = Z_{Am}$;

◊ pour $\omega = \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\,\alpha^2}$: résonance si et seulement si $\alpha < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ (la limite critique n'est pas la même que pour les régimes transitoires) avec un extremum $Z_{mM} = Z_m(\omega_r) = \frac{Z_{Am}\,\omega_0^2}{2\,\alpha\,\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}} = \frac{Z_{Am}\,\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^4-\omega_r^4}}$.

• On peut définir la “bande passante” comme la largeur de la courbe de résonance pour $Z_m = \frac{Z_{mM}}{\sqrt{2}}$:



On obtient ainsi : $\omega^4 - 2\,\omega^2\,\omega_r^2 + 2\,\omega_r^4 - \omega_0^4 = 0$ et $\omega^2 = \omega_r^2 \pm \sqrt{\omega_0^4 - \omega_r^4}$.

Le calcul exact est ensuite compliqué, mais pour $X = \frac{\alpha}{\omega_r}$ petit :

$$\omega^2 = \omega_r^2 . \left(1 \pm 2\,X\,\sqrt{1+X^2}\right) \;;\; \omega \approx \omega_r . \left(1 \pm X - \tfrac{1}{2}X^2 \pm X^3 \cdots\right) \;;$$
$$\Delta\omega \approx 2\,\alpha\,.\,(1 + X^2 \cdots)\,.$$

• On peut alors définir le “facteur de qualité” : $Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega} \approx \frac{\omega_0}{2\,\alpha} = \frac{\sqrt{k\,m}}{\lambda}$ (résonance plus “aiguë” si l’amortissement est faible).

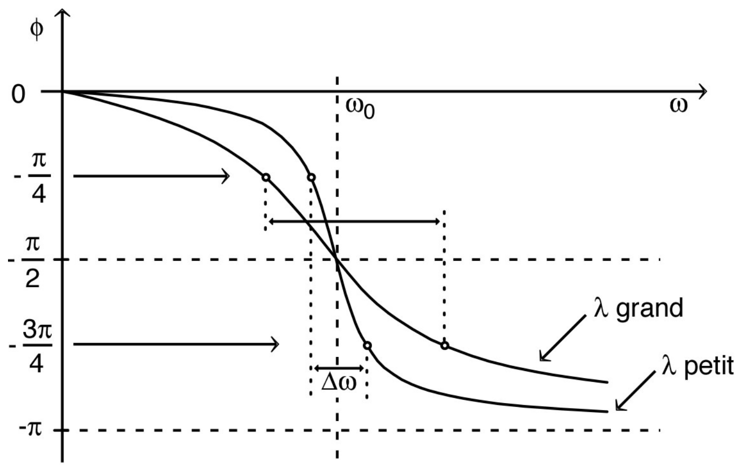
On peut en outre noter que $\frac{z_{mM}}{z_{Am}} = \frac{\omega_0^2}{2\,\alpha\,\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} \approx Q$ pour α petit.

3. Déphasage

• Le déphasage varie (entre 0 et $-\pi$) de façon analogue à celle obtenue en électricité pour l’intensité du courant dans un circuit RLC (entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$) :

◊ déphasage $\phi = -\frac{\pi}{2}$ pour $\omega = \omega_0$ quel que soit α ;

◊ bande passante $\Delta\omega = 2\,\alpha$ limitée (pour tout α) par $\phi = -\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{3\pi}{4}$.



📖 *exercices n° I et II*

4. Puissance

• La puissance mécanique d'une force $\vec{f}$ est : $\mathcal{P} = \vec{f} \cdot \vec{v}$; pour un mouvement rectiligne, l'expression algébrique $\mathcal{P} = f \,.\, v$ est l'analogue mécanique de la puissance instantanée électrique $p(t) = u(t)\, i(t)$.

◊ remarque : si on utilise en électricité le “produit scalaire complexe” pour noter la puissance moyenne : $\underline{P} = \underline{U} \,.\, \underline{I}^*$ on peut être tenté de considérer qu'il s'agit de l'analogue logique du produit scalaire envisagé précédemment ; cette pseudo-analogie est toutefois “bâtarde” car les puissances considérées (instantanée et moyenne) sont des grandeurs différentes.

• Pour calculer la puissance moyenne reçue par le système, on peut considérer que c'est celle fournie par le moteur qui actionne le support :

$$f_A(t) = k \,.\, (z_A - z - \ell_0)$$
$$= k \,.\, [z_{A0} + Z_{Am} \cos(\omega\, t) - z_{eq} - Z_m \cos(\omega\, t + \phi) - \ell_0] \;\; ;$$
$$v_A(t) = \dot{z}_A = -\omega\, Z_{Am} \sin(\omega\, t) \;\; ;$$
$$\mathcal{P}(t) = f_A \,.\, v_A = \tfrac{1}{2} k\, \omega\, Z_{Am}\, Z_m \,.\, [\sin(2\, \omega\, t + \phi) - \sin(\phi)]$$
$$- \tfrac{1}{2} k\, \omega\, Z_{Am}^2 \sin(2\, \omega\, t) - m\, g\, \omega\, Z_{Am} \sin(\omega\, t) \;\; ;$$
$$P = \langle\, \mathcal{P}(t)\, \rangle = -\tfrac{1}{2} k\, \omega\, Z_{Am}\, Z_m \sin(\phi) = \frac{k\, \alpha\, Z_{Am}^2\, \omega_0^2\, \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\, \alpha\, \omega)^2} \,.$$

◊ remarque : on considère ici que le ressort “fait partie” du système décrit par un point matériel ; son énergie cinétique est négligeable ; son énergie potentielle élastique est considérée comme propriété du “point”.

◊ remarque : avec les valeurs efficaces $P = F_{Aeff}\, V_{Aeff} \cos(\phi_A)$ où le déphasage entre f_A et v_A est $\phi_A \neq \phi$.

• On peut aussi considérer que cette puissance est celle fournie par le ressort à M , ou dissipée par les frottements (équivalant à l'effet Joule en électricité) :

$$v(t) = \dot{z} = -\omega\, Z_m \sin(\omega\, t + \phi) \;\; ;$$
$$f(t) = -\lambda\, \dot{z} = \lambda\, \omega\, Z_m \sin(\omega\, t + \phi) \;\; ;$$
$$\mathcal{P}(t) = -f \,.\, v = -\lambda\, \omega\, Z_m^2 \sin^2(\omega\, t + \phi) \;\; ;$$
$$P = \langle\, \mathcal{P}(t)\, \rangle = -\tfrac{1}{2} \lambda\, \omega^2\, Z_m^2 = \frac{k\, \alpha\, Z_{Am}^2\, \omega_0^2\, \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\, \alpha\, \omega)^2} = \frac{P_0\, x^2}{(1 - x^2)^2 + 4\, \alpha^2\, x^2} \,.$$

Ceci correspond ici encore à une courbe de résonance :