DYNAMIQUE - OSCILLATIONS FORCÉES - corrigé des exercices

A. EXERCICES DE BASE

I. Amortissement et puissance dissipée

1. • L'équation de l'oscillateur considéré est de la forme : $\ddot{\underline{x}} + 2\,\alpha\,\dot{\underline{x}} + \omega_0^2\,\underline{x} = \frac{F_0}{m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ (en notations complexes) où m est le coefficient d'inertie de l'oscillateur, où $k = m\,\omega_0^2$ est son coefficient de "raideur" et où $f = 2\,\alpha\,m$ correspond au "frottement" équivalent causant l'amortissement.

• La solution est : $\underline{x} = X_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\phi)}$ avec $X_m = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+(2\,\alpha\,\omega)^2}}$ et $\phi = \arctan\left(\frac{2\,\alpha\,\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\right)$; la vitesse est donc : $\underline{v} = \dot{\underline{x}} = \mathrm{j}\,\omega\,X_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\phi)}$.

• La puissance étant une quantité "quadratique", il est plus simple d'utiliser les notations réelles : $x(t) = X_m\,\cos(\omega\,t+\phi)$ et $v(t) = -\omega\,X_m\,\sin(\omega\,t+\phi)$. On obtient ainsi :

$$p(\omega,t) = \vec{F}\cdot\vec{v} = F\,.\,v = -\omega\,X_m\,F_0\,\cos(\omega\,t+\phi)\,\sin(\omega\,t+\phi)$$
$$= -\frac{1}{2}\,\omega\,X_m\,F_0\,.\left[\sin(2\omega\,t+\phi)+\sin(\phi)\right]\ ;$$

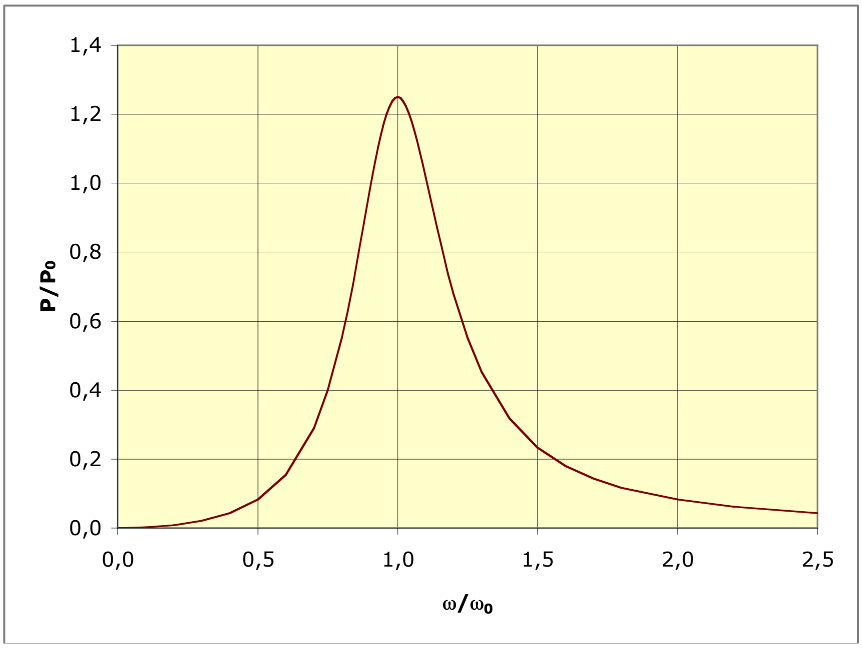
$$P(\omega) = \langle\, p(\omega,t)\,\rangle = -\frac{1}{2}\,\omega\,X_m\,F_0\,\sin(\phi)\ \text{ avec }\ \sin(\phi) = -\frac{2\,\alpha\,\omega}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+(2\,\alpha\,\omega)^2}}\ ;$$

$$P(\omega) = \frac{\alpha\,\omega^2\,F_0^2}{m\cdot\left[\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+(2\,\alpha\,\omega)^2\right]}\ .$$

2. • L'étude peut être simplifiée en utilisant les notations réduites $\frac{\alpha}{\omega_0}$ et $\frac{\omega}{\omega_0}$ ainsi que $P_0 = \frac{F_0^2}{m\,\omega_0}$:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\frac{\alpha}{\omega_0}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2-1\right)^2+\left(2\,\frac{\alpha}{\omega_0}\,\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\ .$$

• Avec ces notations, la courbe de résonance en puissance a l'allure suivante :



II. Diagramme de phase

• La solution des équations du mouvement peut s'écrire :

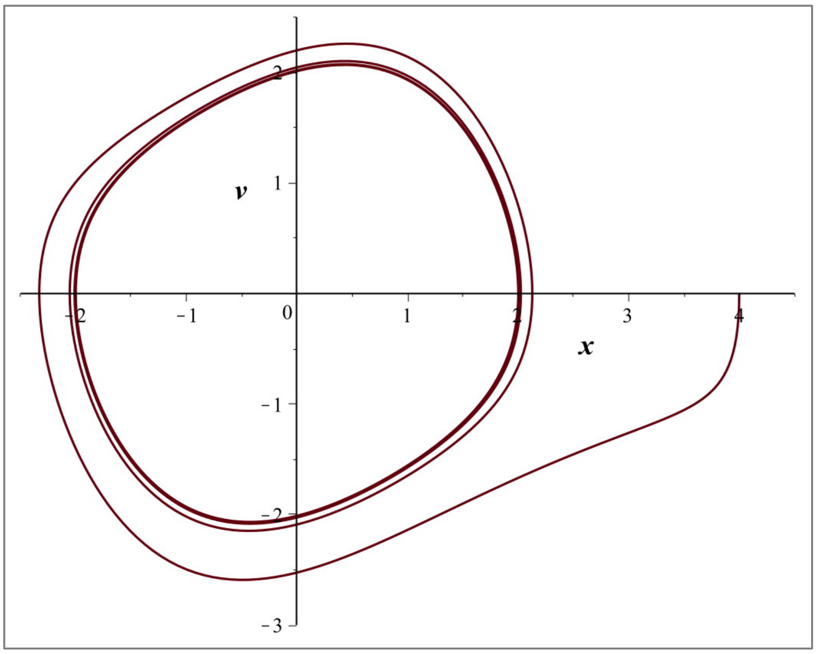
$$x = X_m\,\cos(\omega\,t+\phi)\ ;\ \frac{\dot{x}}{\omega_0} = -\frac{\omega}{\omega_0}\,X_m\,\sin(\omega\,t+\phi)\ .$$

• Le diagramme de phase correspond donc à une ellipse de demi-axe horizontal X_m et de demi-axe vertical $\frac{\omega}{\omega_0} X_m$ (l'ellipse est aplatie horizontalement ou verticalement selon que ω est inférieur ou supérieur à ω_0).

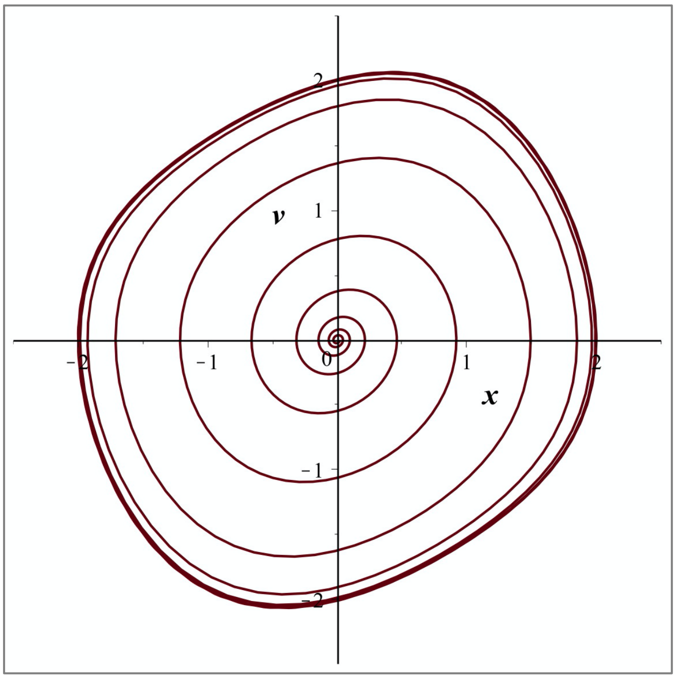
B. EXERCICE D'APPROFONDISSEMENT

III. Oscillations d'un pont suspendu

1. ◊ remarque : pour simplifier les notations, on peut utiliser L comme unité de longueur et $\frac{1}{\omega_0}$ comme unité de temps.
• Avec $\frac{\alpha}{\omega_0} = 0{,}25$ l'intégration numérique montre des oscillations (modérément) amorties, mais au lieu de tendre vers zéro (comme pour l'oscillateur linéaire) le mouvement tend vers un cycle limite avec des extremums pour $\frac{x}{L} = \pm 2$. L'interaction avec le vent apporte l'énergie nécessaire pour entretenir les oscillations en compensant en moyenne les pertes par frottement.



2. • Avec ici encore $\frac{\alpha}{\omega_0} = 0{,}25$ (pour mieux comparer) l'intégration numérique montre des oscillations progressivement amplifiées ; le mouvement tend vers le même cycle limite. L'interaction avec le vent apporte en moyenne suffisamment d'énergie pour forcer les oscillations.
• Il est intéressant de remarquer que la position $x_0 = 0$ (avec une vitesse nulle) correspond à un équilibre ; ce dernier est toutefois instable et il suffit d'un écart initial très faible pour aboutir à des oscillations forcées (d'où les conditions initiales proposées par l'énoncé).
• On constate par ailleurs que l'approche du cycle limite nécessite nettement plus de pseudo-périodes dans le cas amplifié (ici sept fois plus). Dans ce cas l'action du vent ne se limite plus à limiter les pertes d'énergie dues aux frottements, mais doit apporter l'énergie nécessaire à l'oscillation en plus de compenser les pertes.



2
1
v
-2
-1
0
1
2
x
-1
-2