M. IV - DYNAMIQUE - OSCILLATIONS LIBRES

1. Oscillateur harmonique

1.1. Définition

• On considère un point matériel dont l'énergie potentielle dépend d'une variable de position x ; on étudie son comportement au voisinage d'une position d'équilibre stable correspondant à une valeur x_e de la variable :

$$E_p(x) = E_p(x_e) + (x - x_e)\ \frac{\partial E_p}{\partial x}(x_e) + \frac{1}{2}(x - x_e)^2\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}(x_e) + \cdots$$

L'équilibre stable en x_e correspond à un minimum de E_p , par suite :

$$E_p(x) \approx E_p(x_e) + \frac{K}{2} \cdot (x - x_e)^2$$

où le coefficient $K = \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}(x_e) > 0$ est nommé “raideur” de l'oscillateur.

◊ remarque : la variable x doit être une longueur, mais le raisonnement peut se généraliser (déplacement proportionnel à un angle, ou autre…).

• Le point est soumis à une force “de rappel” de coordonnée (algébrique) : $F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = -K \cdot (x - x_e)$ (proportionnalité, selon la loi de Hooke).

En notant $\underline{x} = x - x_e$ l'écart à l'équilibre, le mouvement au voisinage est décrit par l'équation : $\underline{\ddot{x}} + \omega^2\ \underline{x} = 0$ avec la pulsation $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$.

☞ remarque : on peut souvent utiliser l'analogie électro-mécanique :

$q \leftrightarrow x$ (charges déplacées) ; $i = \frac{dq}{dt} \leftrightarrow v = \dot{x}$;

$u = R\ i \leftrightarrow F = \lambda\ v$ (frottement) ; $\frac{1}{C} \leftrightarrow k$ (élasticité) ; $L \leftrightarrow m$;

$E_{el} = \frac{q^2}{2\,C} \leftrightarrow E_{pe} = \frac{1}{2} k\ x^2$; $E_{ma} = \frac{1}{2} L\ i^2 \leftrightarrow E_c = \frac{1}{2} m\ v^2$; ...

1.2. Caractéristiques du mouvement

• Les solutions de : $\ddot{x} + \omega^2\, x = 0$ s'écrivent : $x = A\, \cos(\omega\, t) + B\, \sin(\omega\, t)$. Les constantes d'intégration sont déterminées par les conditions aux limites, par exemple : $A = x(0)$ et $B = \frac{\dot{x}(0)}{\omega}$.

◊ remarque : on peut aussi noter : $x = X_m\, \cos(\omega\, t + \phi)$.

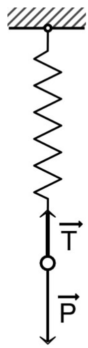
• Pour les petites oscillations, la période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ne dépend pas de l'amplitude (propriété d'isochronisme).

• L'énergie mécanique est constante :

$$E_m = \frac{1}{2} k\, x^2 + \frac{1}{2} m\, \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m\, \omega^2\, (A^2 + B^2) .$$

1.3. Exemple du pendule à ressort vertical

• Pour le pendule à ressort vertical : $E_p = \frac{1}{2} k\, z^2 + m\, g\, z$ (avec l'origine à la position "à vide"). L'équilibre donne : $\frac{dE_p}{dz} = k\, z + m\, g = 0$ donc $z_e = -\frac{m\, g}{k}$ (équilibre stable car $\frac{d^2 E_p}{dz^2} = k > 0$).



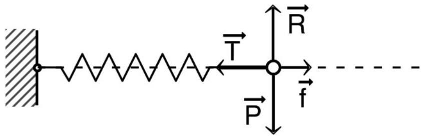
◊ remarque : on peut aussi noter $E_p = E_p(z_e) + \frac{1}{2} k\, \underline{z}^2$ avec $E_p(z_e) = -\frac{m^2\, g^2}{2\, k}$ et $\underline{z} = z - z_e$.

• En dérivant la relation : $E_m = E_c + E_p = Cste$ on obtient l'équation du mouvement : $\ddot{z} + \frac{k}{m}\, z = -g$; on peut aussi l'écrire : $\underline{\ddot{z}} + \frac{k}{m}\, \underline{z} = 0$.

🕮 *exercices n° I, II, III et IV.*

2. Oscillateur avec amortissement "solide"

• On considère un pendule à ressort horizontal avec frottement solide (de coefficient λ) et on étudie le cas où il y a oscillation (donc glissement).



La réaction normale $\vec{R}$ du support compense le poids $\vec{P}$ (mouvement horizontal) ; par ailleurs, tant qu'il y a glissement, le frottement $f = \lambda R$ (selon la direction et le sens contraire du mouvement) est constant (dans ce cas).

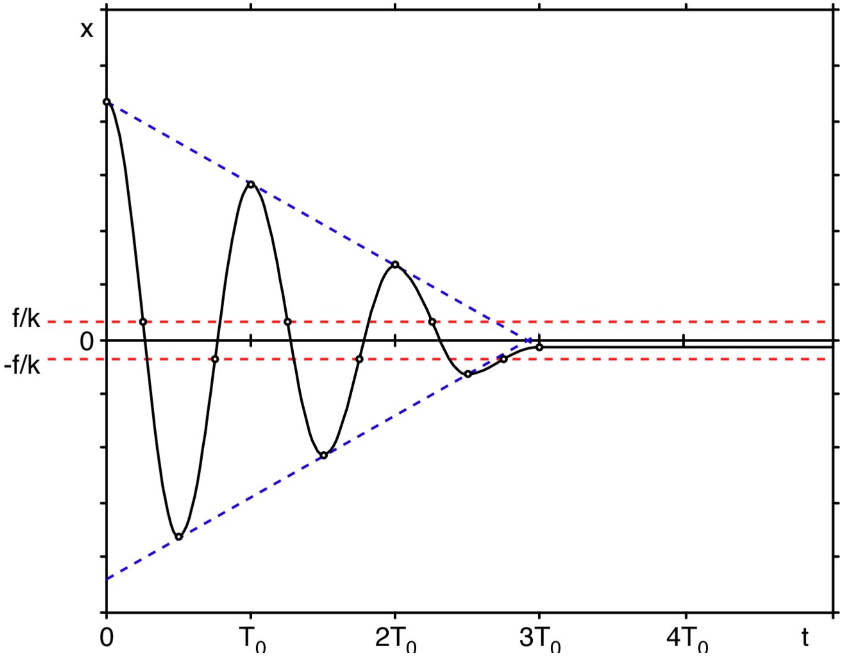
• On obtient l'équation différentielle : $m\,\ddot{x} = -k\,x - \varepsilon\,f$ avec $\varepsilon = \frac{\overline{v}}{v} = \mathrm{sgn}(\overline{v})$; ceci peut encore s'écrire : $\ddot{x} + \omega_0^2\,x = -\frac{\varepsilon\,f}{m}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Pour un départ en $x_0 > \frac{f}{m\,\omega_0^2} = \frac{f}{k} > 0$ à une vitesse initiale nulle, on obtient : $\ddot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{f}{m}$ puis la solution : $x = \frac{f}{k} + X_m\,\cos(\omega_0\,t)$ où $X_m = x_0 - \frac{f}{k} > 0$.

Pour un "redépart" en $x'_0 = 2\,\frac{f}{k} - x_0 < -\frac{f}{k} < 0$ à une vitesse initiale nulle, on obtient : $\ddot{x} + \omega_0^2\,x = -\frac{f}{m}$; $x = -\frac{f}{k} + X'_m\,\cos(\omega_0\,t)$; $X'_m = x_0 - 3\,\frac{f}{k} > 0$; puis ainsi de suite.

Ceci donne une évolution par raccordement de portions de sinusoïdes décalées, jusqu'à l'arrêt lors du premier passage à vitesse nulle dans l'intervalle $-\frac{f}{k} < x < \frac{f}{k}$.

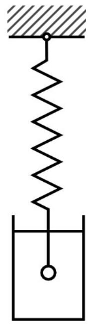
◊ remarque : le frottement solide est souvent la principale cause d'incertitude des appareils de mesure à aiguille, car il correspond à un "intervalle d'arrêt" dans lequel la position finale est difficilement prévisible.



◊ remarque : la pseudo-période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ est l'intervalle entre les passage par $\frac{f}{k}$ des portions “descendantes” (ou $-\frac{f}{k}$ pour les portions “ascendantes”), ou entre les maximums (ou les minimums) qui sont ici alignés ; par contre, il n'y a pas exactement un décalage T_0 entre les points de tangence de l'enveloppe (qui n'est d'ailleurs pas exactement rectiligne).

3. Oscillateur avec amortissement “visqueux”

• On considère ici un pendule vertical avec frottement visqueux (le coefficient de frottement est λ), réalisé en plongeant la masse m dans un liquide.



On peut tenir compte des interactions avec le fluide (poussée d'Archimède...) en “renormalisant” :

◊ la masse : $m' = m + m_e$ (où m_e est la masse équivalente de fluide “entraîné” avec l'oscillateur) ;

◊ la pesanteur : $\vec{g}' = \vec{g}\,\frac{m-m_d}{m+m_e}$ (où m_d est la masse de fluide “déplacé” du volume occupé par l'oscillateur).

◊ remarque : pour les expériences usuelles, $m_e \approx \frac{1}{2} m_d$; dans la suite, afin de simplifier l'écriture, on note m et $\vec{g}$ les quantités renormalisées.

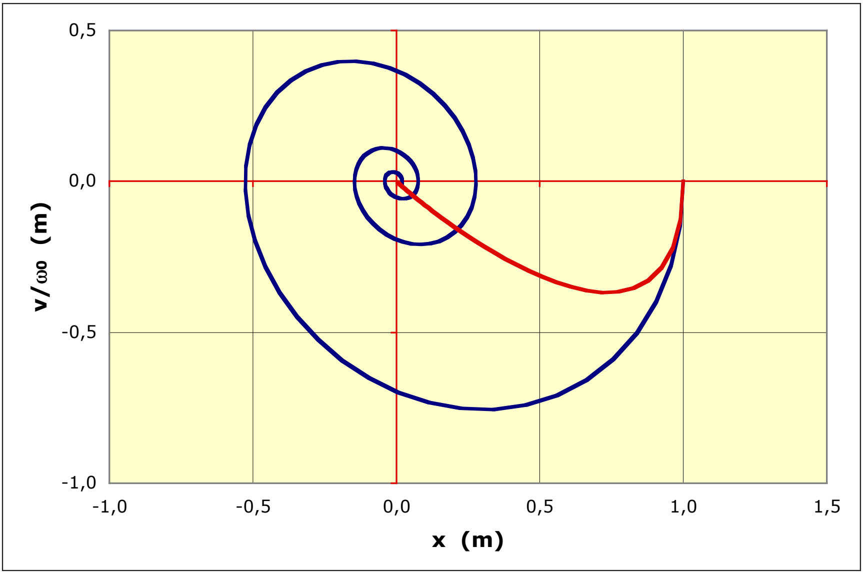
• Avec l'origine à l’extrémité du ressort “à vide” : $m\,\ddot{z} = -m\,g - k\,z - \lambda\,\dot{z}$; ou bien, en posant $\alpha = \frac{\lambda}{2\,m}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: $\ddot{z} + 2\,\alpha\,\dot{z} + \omega_0^2\,z = -\,g$.

En prenant comme origine la position d’équilibre $z_0 = -\frac{g}{\omega_0^2}$ l’équation devient : $\ddot{z} + 2\,\alpha\,\dot{z} + \omega_0^2\,z = 0$.

Cette équation est analogue à celle pour un circuit électrique “RLC” en régime transitoire ($L\,\ddot{q} + R\,\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$), donc les solutions sont semblables :

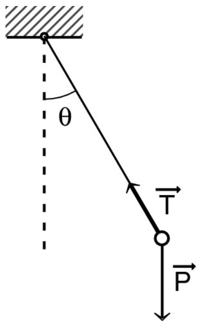
$\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$: régime pseudopériodique, amorti exponentiellement ;
$\alpha^2 - \omega_0^2 = 0$: régime apériodique “critique” (le plus vite amorti) ;
$\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$: régime apériodique (amorti plus progressivement).

• Ceci peut se visualiser par un diagramme dans “l’espace de phase”, représentant la quantité de mouvement, ou la vitesse, en fonction de la position.



◊ remarque : on peut utiliser $\frac{v}{\omega_0}$ si on veut une unité de longueur.

4. Exemple anharmonique : le pendule pesant



• Pour le pendule pesant, l’énergie potentielle peut s'écrire : $E_p = m\,g\,\ell\,.[1-\cos(\theta)]$ et l’équilibre correspond à : $\frac{dE_p}{d\theta} = m\,g\,\ell\,\sin(\theta) = 0$ c’est-à-dire à : $\theta_0 = 0$ (équilibre stable pour $\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = m\,g\,\ell\,\cos(\theta) > 0$).

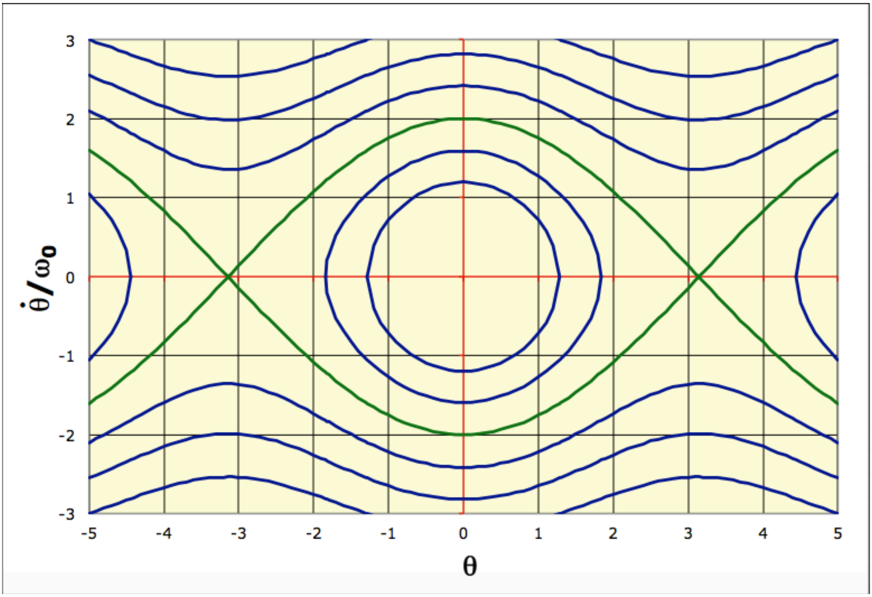
◊ remarque : au voisinage de l'équilibre on peut écrire $E_p \approx E_{p0} + \frac{1}{2}K\,\theta^2$ avec $E_{p0} = E_p(0) = 0$ et $K = m\,g\,\ell$.

• En dérivant la relation : $E_m = E_c + E_p = Cste$ on obtient ainsi l'équation du mouvement : $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin(\theta) = 0$, c'est-à-dire : $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta \approx 0$.

On retrouve un oscillateur harmonique pour les petites oscillations, mais la période des grandes oscillations dépend de leur amplitude.

• Pour un pendule à tige (un fil se plierait), l'intégration de l'équation précédente (ou l'énergie mécanique) donne : $\frac{\dot{\theta}}{\omega_0} = \sqrt{2\,[\cos(\theta) - \cos(\theta_0)] + \left(\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0}\right)^2}$.

On en déduit le diagramme de phase suivant :



◊ remarque : le profil d'énergie potentielle et en correspondance avec la “coupe” selon l'axe horizontal du diagramme.

🕮 *exercices n° V, VI et VII.*