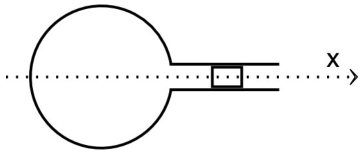
DYNAMIQUE - OSCILLATIONS LIBRES - exercices

A. EXERCICES DE BASE

I. Résonateur de Helmholtz

• Un volume d'air V_0 à la pression p_0 (égale à la pression extérieure) est contenu dans un récipient dont le goulot tubulaire (de longueur ℓ et de section s) est fermé par un piston. Ce dernier, de masse m, peut coulisser sans frottement dans la partie tubulaire ; on note x son abscisse par rapport à la position d'équilibre prise comme origine. Lorsqu'on écarte le piston de sa position d'équilibre, il oscille.



• En admettant que le gaz dans le récipient évolue de façon adiabatique (sans transfert de chaleur), on peut montrer (en thermodynamique) que la pression évolue selon la loi : $p\,V^{\gamma} = p_0\,{V_0}^{\gamma}$ où γ est un coefficient caractéristique des propriétés du gaz : $\gamma = 1{,}4$ pour l'air. En déduire la période des petites oscillations.

• En considérant le même récipient mais sans piston, on peut faire osciller l'air contenu dans le goulot. En prenant pour masse m la masse de l'air contenu dans le goulot, calculer la fréquence des oscillations.

◊ remarque : on ne tient pas compte ici des effets de propagation ; ceci suppose que la longueur d'onde λ obtenue est telle que $\lambda^3 \gg V_0$.

II. Oscillation au voisinage d'un équilibre

• Un bol a la forme d'un paraboloïde de révolution d'axe (Oy) vertical ; soit $y = a\,x^2$ l'équation de sa section méridienne. On lâche en un point de la surface intérieure, avec une vitesse initiale nulle, un point matériel pouvant glisser sans frottement sur la surface du bol. Montrer que le mouvement est périodique. Exprimer la période dans le cas particulier des petites oscillations.

III. Oscillateur anharmonique et dilatation

• Un point matériel M, de masse m, est mobile sur un axe Ox ; son énergie potentielle peut s'écrire sous la forme : $E_p = \frac{1}{2}k\,x^2 - \frac{1}{3}k\,s\,x^3$ où k et s sont des constantes positives.

1. • Tracer la courbe représentant $E_p = E_p(x)$ et montrer que seule la position $x = 0$ correspond à un équilibre stable.

2. • On étudie le mouvement de M au voisinage de $x = 0$; montrer que ceci correspond à $x \ll \frac{1}{s}$. Écrire dans ces conditions l'équation du mouvement.

3. • On cherche une solution de la forme : $x = A\,.\,[\cos(\omega_0\,t) + \varepsilon\,f(t)]$ où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, où $f(t)$ est une fonction inconnue de t et où $A \ll \frac{1}{s}$ et $\varepsilon \ll 1$ sont des constantes. Interpréter cette expression de x.

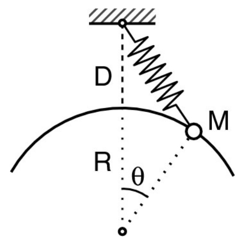
   • Après substitution dans l'équation du mouvement, montrer que : $f(t) \approx \cos(2\,\omega_0\,t) + a$ et expliciter les constantes ε et a en fonction de s et A.

4. • Calculer la valeur moyenne de x au cours du temps (ceci correspond à la position moyenne au voisinage de l'équilibre).

   • On suppose que ce calcul correspond au mouvement de l'un des atomes d'un cristal, dans une direction, au voisinage de sa position d'équilibre. En considérant que l'énergie moyenne de l'énergie d'agitation thermique de l'atome est $k_B\,T$ (où k_B est la constante de Boltzmann et T la température), montrer que ceci explique l'origine de la dilatation du cristal.

IV. Oscillation au voisinage d'un équilibre

1. • Dans le dispositif ci-contre, le mobile M a une masse m , le ressort a une raideur k et une longueur “à vide” $L_0 < D$ (il reste tendu).



a) Montrer que la longueur du ressort peut s'exprimer sous la forme :

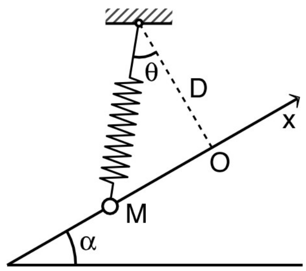
$$L(\theta) = \sqrt{(R\ \sin(\theta))^2 + (D + R - R\ \cos(\theta))^2}\ .$$

b) En raisonnant à l'aide de l'énergie potentielle, déterminer les positions d'équilibre.

c) Déterminer la stabilité de chacun de ces équilibres.

d) On suppose vérifiée la condition : $\left(1 - \frac{L_0}{D}\right)(D + R) > \frac{m\,g}{k}$. Déterminer la raideur K de l'oscillateur et la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable.

2. • Dans le dispositif ci-contre, le mobile M a une masse m , le ressort a une raideur k et une longueur “à vide” $L_0 = D$ (il reste tendu).



a) Exprimer la longueur du ressort en fonction de D et θ , puis en fonction de x et θ .

b) En posant $\lambda = \frac{m\,g\ \sin(\alpha)}{k\,L_0}$ et en raisonnant à l'aide de l'énergie potentielle, exprimée en fonction de θ , montrer que les positions d'équilibre sont solution de l'équation : $\tan(\theta) = \sin(\theta) + \lambda$.

c) Justifier qu'il existe une et une seule solution ; effectuer l'application numérique pour $\lambda = 1$.

d) Déterminer la stabilité de l'équilibre (pour λ quelconque).

e) Déterminer la raideur K de l'oscillateur et la période des petites oscillations.

V. Amortissement et viscosité

• Dans un liquide dont le coefficient de viscosité est η , une sphère de rayon r et animée d'une vitesse $\vec{v}$ est soumise à une force de frottement visqueux (pour les faibles vitesses) : $\vec{f} = -6\pi\,\eta\,r\,\vec{v}$. Une telle sphère, de masse m , est suspendue à un ressort de raideur k . La période d'oscillation dans l'air (où le frottement est négligeable) est T_0 ; la pseudo-période dans le liquide est T .

• Indiquer l'expression de η en fonction des caractéristiques de la sphère, de T_0 et T .

• Exprimer le décrément logarithmique δ du mouvement (diminution du logarithme de l’amplitude pour une pseudo-période) en fonction des caractéristiques de la sphère, de η et T .

VI. Amortissement et facteur de qualité

1. • On considère un oscillateur harmonique très faiblement amorti ; exprimer le facteur de qualité Q en fonction du décrément logarithmique δ (diminution du logarithme de l’amplitude pour une pseudo-période).

2. • On observe qu'après n oscillations de pseudo-période T voisine de T_0 , l'amplitude du mouvement n'est plus que le dixième de l'amplitude initiale ; exprimer le facteur de qualité Q en fonction de n .

VII. Diagrammes de phase

• Tracer le diagramme de phase ($\frac{\dot{x}}{\omega_0}$ en fonction de x) pour les oscillations libres suivantes :

a) oscillateur harmonique non amorti ;

b) oscillateur harmonique amorti par frottement solide ;

c) pendule pesant non amorti.

B. EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

VIII. Amortissement par courants de Foucault

• Un cadre carré de côté A est placé dans le plan vertical Oxz , ses côtés étant parallèles aux axes. Ce cadre, de masse m , est constitué par un fil de résistance électrique R ; il est mobile suivant Oz et suspendu à un ressort de raideur k de telle sorte que son centre est à l'équilibre en O . Un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ parallèle à Oy (orthogonal) est appliqué dans la région où $z > 0$; les mouvements du cadre sont tels qu'il n'est jamais entièrement intérieur, ni entièrement extérieur à cette zone. En supposant qu'on provoque des oscillations, faiblement amorties par les courants de Foucault, calculer le décrément logarithmique (diminution du logarithme de l'amplitude pour une pseudo-période).

IX. Oscillateur à trois dimensions

• On considère un oscillateur correspondant à un point matériel dont l'énergie potentielle peut s'écrire sous une forme générale : $E_p = E_p(x, y, z)$.

• En notant (x, y, z) par x_i avec $i = 1\,;2\,;3$ on suppose que cette expression peut se développer sous une forme généralisée : $E_p(M) \approx E_p(M_0) + \vec{\nabla} E_p(M_0) \cdot \overrightarrow{M_0 M} + \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x_i \, \partial x_j}(M_0) \, . \, (x_i - x_{i0})(x_j - x_{j0}) \right)$.

• On suppose en outre qu'il est possible de choisir la direction des axes de façon à "diagonaliser" le second ordre : $E_p(M) \approx E_p(M_0) + \vec{\nabla} E_p(M_0) \cdot \overrightarrow{M_0 M} + \frac{1}{2} \sum_i (K_i(M_0) \, . \, (x_i - x_{i0})^2)$ avec $K_i = \frac{\partial^2 E_p}{\partial {x_i}^2}(M_0)$.

1. • Indiquer les conditions d'équilibre (stables et/ou instables).

2. a) Étudier les petits mouvements au voisinage d'un équilibre stable.
   b) Préciser dans le cas où les constantes K_i sont égales.