M. VI - DYNAMIQUE ; ROTATIONS

1. Moment cinétique

• La mécanique du point peut être décrite sans rotation : toute “rotation” d’un point est une translation curviligne (un point ne tourne pas sur lui même).

La description sous forme de rotation est alors équivalente à celle qui considère les translations, mais elle peut être utile pour simplifier certains calculs en les réexprimant autrement.

• On peut ainsi définir le “moment cinétique” d’un point matériel M par rapport à un point O (qui n’est pas forcément l’origine du repère) : $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \times \vec{p}$ où $\vec{p}$ est la quantité de mouvement de M .

On peut en outre définir le “moment cinétique algébrique” d’un point M par rapport à un axe orienté Δ (arbitraire) : $\bar{L}_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta$ où $\vec{u}_\Delta$ est un vecteur unitaire orienté selon Δ et où O est un point quelconque de Δ .

◊ remarque : le choix judicieux (arbitraire) du point O référence des moments peut simplifier les calculs.

2. Moments des forces

• On peut définir d’une façon analogue le “moment” (par rapport à un point O , qui n’est pas forcément l’origine du repère) d’une force $\vec{F}$ appliquée à un point matériel M : $\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OM} \times \vec{F}$.

On peut de même définir le “moment algébrique” par rapport à un axe orienté Δ (arbitraire) : $\bar{\mathcal{M}}_\Delta = \vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{u}_\Delta$ où $\vec{u}_\Delta$ est un vecteur unitaire orienté selon Δ et où O est un point quelconque de Δ .

3. Théorème du moment cinétique

• Dans de nombreux cas (mais pas tous), le mouvement peut alors être décrit par le théorème du moment cinétique : $\sum \vec{\mathcal{M}}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$; ou bien en projection sur un axe : $\sum \overline{\mathcal{M}}_\Delta = \frac{d\bar{L}_\Delta}{dt}$.

En effet : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum\left(\overrightarrow{OM} \times \vec{F}\right) + (\vec{v}_M - \vec{v}_O) \times \vec{p}$; or $\vec{v}_M \times \vec{p} = \vec{0}$, d'où la relation précédente quand $\vec{v}_O \parallel \vec{v}_M$ (et en particulier si O est fixe).

◊ remarque : cette relation ne fournit une information supplémentaire que pour le cas d'un système complexe ; pour un point matériel elle équivaut au principe fondamental de la dynamique.

◊ remarque : pour un point en rotation autour d'un point O (à distance $OM = r$ constante), on obtient : $\overrightarrow{OM} \times \vec{v} = r^2\,\vec{\omega}$; on peut alors définir un “moment d'inertie” $J = m\,r^2$ et écrire : $\sum \vec{\mathcal{M}}_O = J\,\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ (analogue à $\sum \vec{F} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt}$, mais cette relation n'est valable que dans ce cas très particulier).

4. Exemples d'applications

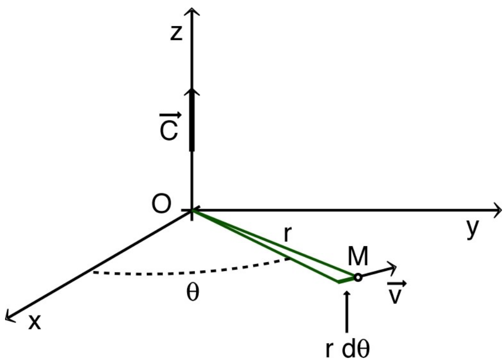
4.1. Mouvements à force centrale

• Dans ce cas, avec O fixe :

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OM} \times \vec{F} = \vec{0}$$

et $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \times \vec{p}$ est constant.

Puisque $\overrightarrow{OM}$ reste perpendiculaire à $\vec{L}_O$, le mouvement de M se fait dans le plan perpendiculaire à $\vec{L}_O$ et contenant O .



En coordonnées polaires dans le plan du mouvement :

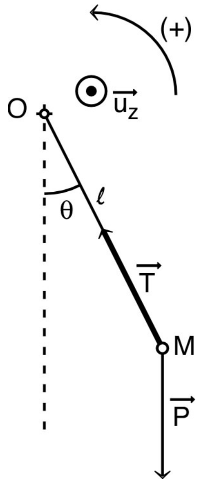
$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r \quad ; \quad \vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \quad ; \quad \vec{L}_O = m\,r^2\,\dot{\theta}\,\vec{u}_z \quad ;$$

donc la quantité $C = r^2\,\dot{\theta}$ est constante.

• La “vitesse aréolaire” (vitesse algébrique de “balayage” de l’aire par OM) est : $\dot{S} = \frac{1}{2} r^2 \, \dot{\theta} = \frac{C}{2}$; la constance de cette vitesse aréolaire pour les mouvements à accélération centrale est appelée “loi des aires”.

◊ remarque : il faut ne pas confondre l’aire S et l’abscisse curviligne s .

4.2. Pendule simple



• En se limitant au mouvement dans un plan vertical :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \times \vec{p} = m \, \ell^2 \, \dot{\theta} \, \vec{u}_z$$

et $\quad \sum \vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OM} \times \left(\vec{T} + \vec{P}\right) = -m \, g \, \ell \, \sin(\theta) \, \vec{u}_z$;

c’est-à-dire algébriquement (avec $\vec{u}_\Delta = \vec{u}_z$) :

$$\bar{L}_\Delta = m \, \ell^2 \, \dot{\theta} \quad \text{et} \quad \sum \bar{\mathcal{M}}_\Delta = -m \, g \, \ell \, \sin(\theta) \, .$$

Puisque O est fixe : $\frac{d\bar{L}_\Delta}{dt} = \sum \bar{\mathcal{M}}_\Delta$ c’est-à-dire :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin(\theta) = 0 \, .$$

Pour les petites amplitudes ($\theta \leq 20\,°$) : $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \, \theta \approx 0$

d’où : $\theta = \Theta_m \, \cos(\omega \, t + \phi)$ avec $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

◊ remarque : si le pendule est lâché immobile, le mouvement débute dans le plan vertical contenant O et M (les forces sont dans ce plan) ; mais si le mouvement est dans un plan vertical contenant O , alors $\vec{L}_O \parallel \sum \vec{\mathcal{M}}_O = \dot{\vec{L}}_O$ donc le mouvement reste dans ce plan (perpendiculaire à $\vec{L}_O$).

🕮 *exercices n° I, II et III.*

5. Travail d'une force lors d'un mouvement circulaire

• Pour un point en mouvement circulaire (par rapport à un point fixe O quelconque sur un axe de rotation Δ) le travail d'une force $\vec{F}$ peut s'exprimer en fonction de son moment :

$$\delta W = \bar{\mathcal{M}}_\Delta \, d\theta = \vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{\omega} \, dt = \left(\overrightarrow{OM} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{\omega} \, dt = \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}\right) \cdot \vec{F} \, dt = \vec{v} \cdot \vec{F} \, dt$$

.

◊ remarque : on note généralement $\vec{\omega} = \dot{\theta} \, \vec{u}_\Delta$; par ailleurs pour un vecteur $\overrightarrow{OM}$ de norme constante : $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = \vec{u}_\Delta \times \overrightarrow{OM}$.

◊ remarque : le produit mixte est invariant par “permutation circulaire” :

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{C} = \left(\vec{C} \times \vec{A}\right) \cdot \vec{B} = \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) \cdot \vec{A} \, .$$