

M. VII - DYNAMIQUE - PLANÈTES ET SATELLITES

1. Champs newtonien et coulombien

- L'interaction newtonienne entre deux points M_1 et M_2 :

$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r \quad (\text{avec } \vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{r} \text{ et } G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2 \cdot \text{kg}^{-2})$$

est analogue à la loi coulombienne :

$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r \quad (\text{avec } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ N.m}^2 \cdot \text{C}^{-2}).$$

On peut associer à la force électrostatique un "champ électrostatique" causé par q_1 en M_2 : $\vec{E}(M_2) = \frac{\vec{f}_{1 \rightarrow 2}}{q_2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$;

on définit de même un "champ gravitationnel" causé par m_1 en M_2 :

$$\vec{g}(M_2) = \frac{\vec{f}_{1 \rightarrow 2}}{m_2} = -\frac{G m_1}{r^2} \vec{u}_r.$$

◊ remarque : le champ gravitationnel (\approx pesanteur) a une unité d'accélération.

- Les forces en $\frac{1}{r^2}$ dérivent d'une énergie potentielle en $\frac{1}{r}$:

$$E_p = -G \frac{m_1 m_2}{r} \text{ pour la loi newtonienne ;}$$

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} \text{ pour la loi coulombienne.}$$

Les champs en $\frac{1}{r^2}$ dérivent d'un potentiel en $\frac{1}{r}$:

$$V(M_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ (en volts), tel que : } \vec{E} = -\vec{\nabla} V ;$$

$$\mathcal{V}(M_2) = -\frac{G m_1}{r} \text{ (en m}^2 \cdot \text{s}^{-2}\text{), tel que : } \vec{g} = -\vec{\nabla} \mathcal{V}.$$

☞ remarque : le théorème de Gauss s'applique aux champs de gravitation : $\Phi = \iint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = 4\pi G M_{\text{int}} = 4\pi G \iiint_V \mu d\tau$ où μ est la masse volumique et où V est le volume intérieur à la surface fermée S ; ainsi, le champ créé par une distribution de masse à symétrie sphérique, à l'extérieur de celle-ci, est le même que si toute la masse était au centre (propriété des champs en $\frac{1}{r^2}$).

2. Étude des trajectoires

2.1. Mouvement à accélération centrale

- On considère un mouvement causé par une force passant par un point fixe choisi comme origine O.
- D'après la conservation du moment cinétique, le mouvement est plan (dans le plan perpendiculaire à $\vec{\sigma}_O$) et suit la loi des aires.

En coordonnées cylindriques (polaires dans le plan du mouvement), ceci s'écrit : $\vec{\sigma}_O = mr^2\theta^\bullet \vec{u}_z$ avec la constante de la loi des aires : $C = r^2\theta^\bullet = 2S$.

- En repérant la trajectoire par l'équation $r = r(\theta)$ obtenue par élimination du temps t, en utilisant la variable $u = \frac{1}{r}$, et en substituant $\theta^\bullet = \frac{C}{r^2} = Cu^2$, on peut réexprimer la vitesse ("première formule de Binet") :

$$\vec{v} = r^\bullet \vec{u}_r + r\theta^\bullet \vec{u}_\theta = C \left[-\frac{du}{d\theta} \vec{u}_r + u \vec{u}_\theta \right].$$

- D'une façon analogue, compte tenu du fait que l'accélération centrale a une composante orthoradiale nulle : $\vec{a} = (r'' - r\theta'^2) \vec{u}_r$. En utilisant les mêmes notations que précédemment, on obtient la "deuxième formule de Binet" :

$$\vec{a} = -C^2u^2 \left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right] \vec{u}_r.$$

2.2. Propriétés générales

- On se propose d'étudier le mouvement d'un point M_2 , de masse m , en interaction avec un point M_1 de masse $M \gg m$.

On prend comme origine (notée O) la position "fixe" de M_1 (centre d'inertie).

On considère une interaction de la forme : $\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = \frac{K}{r^2} \vec{u}_r$

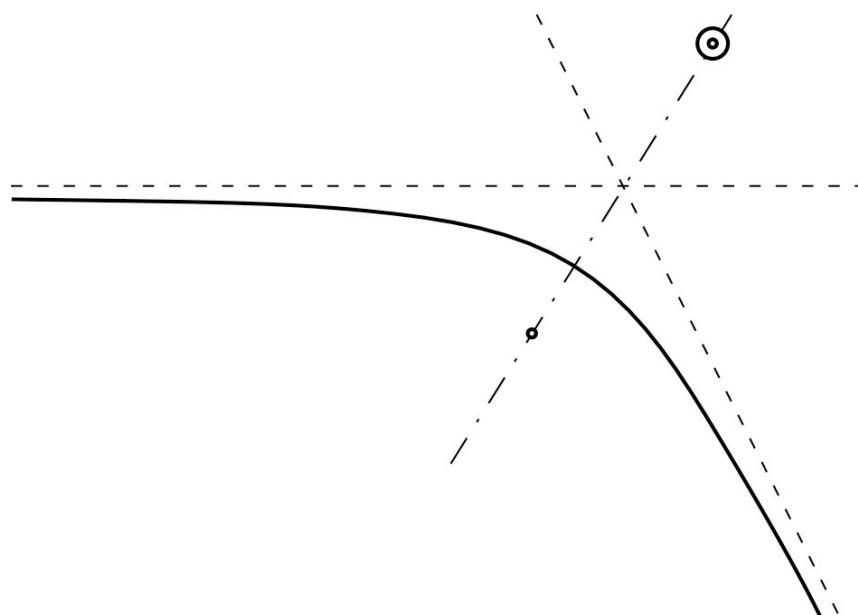
(avec $K > 0$ pour le cas répulsif et $K < 0$ pour le cas attractif).

- Pour une force centrale, la seconde formule de Binet donne :

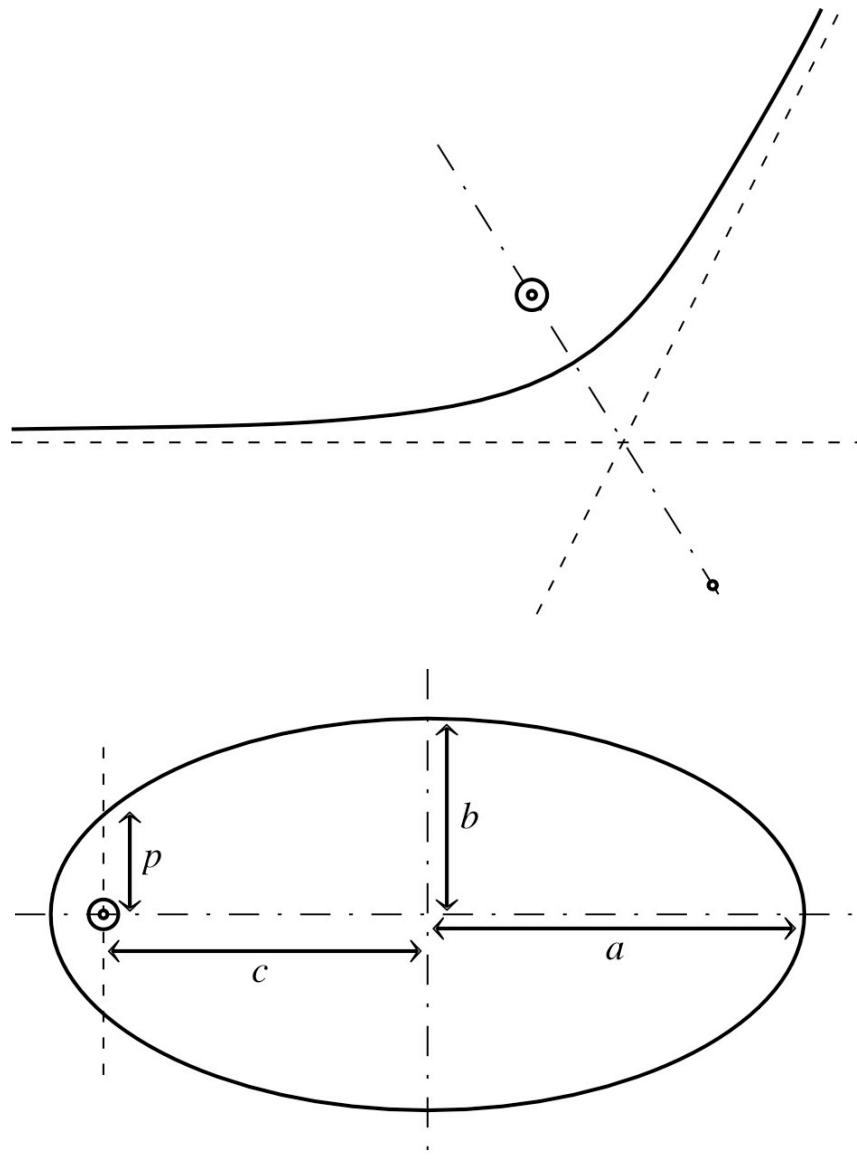
$$\ddot{\vec{a}} = -C^2 u^2 \left[\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right] \vec{u}_r = \frac{K}{m} u^2 \vec{u}_r \quad \text{puis : } \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{K}{C^2 m}.$$

La solution générale est de la forme : $\frac{1}{r} = u = -\frac{K}{C^2 m} + A \cos(\theta - \theta_0)$ où A et θ_0 sont déterminées par les conditions initiales. Les trajectoires correspondantes sont des coniques.

- Pour des forces répulsives ($K > 0$), les trajectoires sont des portions d'hyperboles ayant l'origine comme foyer :



- Pour des forces attractives ($K < 0$), les trajectoires sont des portions d'hyperboles, d'ellipses, ou de paraboles (cas limite intermédiaire) :



2.3. Mouvement des planètes et satellites

- Le mouvement des satellites correspond au cas attractif, entre deux masses M et m (satellite), avec : $K = -\frac{GM}{r^2} m$.

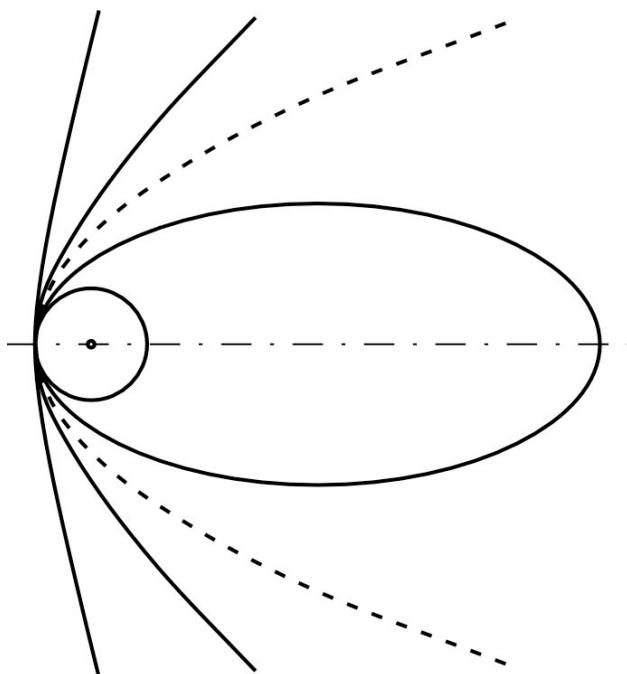
La solution est : $\frac{1}{r} = \frac{GM}{C^2} + A \cos(\theta) = \frac{1}{p} [1 + e \cos(\theta)]$ où e et $p = \frac{C^2}{GM}$
sont nommés “excentricité” et “paramètre” de la trajectoire.

- L'excentricité (positive) caractérise la forme de la trajectoire :

$e = 0$ pour un cercle ;
 $0 < e < 1$ pour une ellipse ;
 $e = 1$ pour une parabole ;
 $e > 1$ pour une hyperbole.

◊ remarque : pour une force répulsive ($K > 0$), on évite $e < -1 < 0$ en se ramenant à l'autre foyer et en décalant θ de π (ainsi $e > 1$) :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} [-1 + e \cos(\theta)].$$



- Pour le mouvement des planètes, on vérifie les deux premières lois de Kepler : mouvement elliptique (donc plan) et vérifiant la loi des aires.

☞ remarque : attention ici à l'utilisation particulière des lettres $a, e, p\dots$

- Pour une ellipse (la somme des distances aux deux foyers est constante) :

$$a = \frac{p}{1-e^2} \quad ; \quad c = \frac{pe}{1-e^2} = a e \quad ; \quad b = \sqrt{pa} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}.$$

La loi des aires : $C = r^2\theta^\circ = 2 S^\circ = \frac{2\pi ab}{T}$ donne alors la troisième loi de Kepler, qui relie le demi-grand-axe de l'ellipse à la période : $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$.

☞ remarque : la troisième loi de Kepler se retrouve facilement dans le cas circulaire ($e = 0$, ce qui n'est pas trop particulier car $e \ll 1$ pour la plupart des planètes) : $m a = m\omega^2 R = \frac{GMm}{R^2}$ d'où $\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$.

◊ remarque : ayant calculé a et T pour le mouvement de la Terre, c'est ainsi qu'on a pu en déduire la masse du Soleil : $M_S \approx 2,0 \cdot 10^{30}$ kg.

3. Aspects énergétiques

- Pour les satellites, la force gravitationnelle dérive de l'énergie potentielle :

$$E_p = -\frac{GMm}{r} u \quad \text{avec} \quad u = \frac{1}{r} = \frac{1}{p} [1 + e \cos(\theta)].$$

L'énergie cinétique est : $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mC^2 [(\frac{du}{d\theta})^2 + u^2]$ donc l'énergie mécanique est : $E_m = E_c + E_p = -\frac{GMm}{2p} (1 - e^2)$; ceci correspond à $E_m > 0$ pour une hyperbole, et à $E_m < 0$ pour une ellipse.

 remarque : pour une ellipse $E_m = -\frac{GMm}{2a}$, ce qui se retrouve facilement dans le cas circulaire : $E_p = -\frac{GMm}{R}$ et $\frac{mv^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}$ donc : $E_c = \frac{GMm}{2R}$ et $E_m = -\frac{GMm}{2R}$.

◊ remarque : on peut retrouver l'équation de la trajectoire d'après : $E_m \cdot = 0$.

4. Vitesses caractéristiques

4.1. Vitesse minimum de satellisation

- La vitesse minimum de satellisation correspond à une orbite circulaire “rasante” de rayon $R \approx R_T$ (avec $m \ll M_T$) :

$$\frac{mv_0^2}{R_T} = \frac{GM_T m}{R_T^2} \quad \text{et} \quad v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} = \sqrt{g_0 R_T} = 7920 \text{ m.s}^{-1}.$$

◊ remarque : cette vitesse est définie par rapport à un référentiel galiléen ; la satellisation est un peu plus facile dans le sens de rotation de la Terre, avec la vitesse d'entraînement : $v_e = \omega_e R_T \approx 460 \text{ m.s}^{-1}$ à l'équateur.

4.2. Orbite géostationnaire

- Pour une orbite plus éloignée, la vitesse sur orbite est plus faible (sur une orbite circulaire : $E_c = \frac{GM_T m}{2R}$), mais l'énergie mécanique y est plus grande donc la vitesse de lancement doit être plus grande.

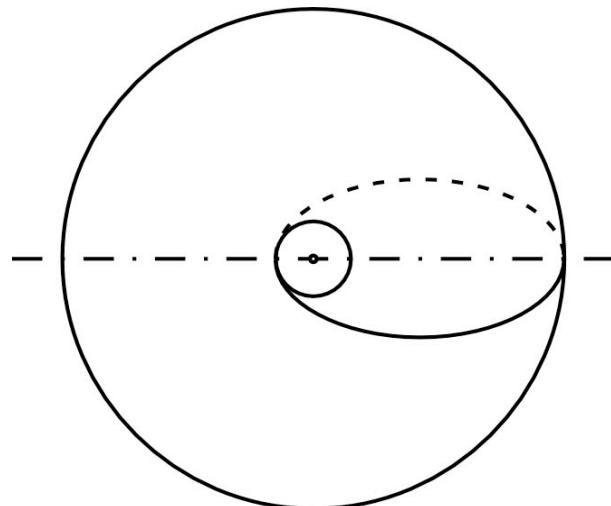
Pour l'orbite géostationnaire : $R' = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{g_0 R_T^2 T^2}{4\pi^2}} = 42300 \text{ km} ;$

$$\lambda = \frac{R'}{R_T} = \sqrt[3]{\frac{g_0 T^2}{4\pi^2 R_T}} \approx 6,6 ; E_c' = \frac{GM_T m}{2R'} = \frac{E_c}{\lambda} ; v' = \frac{v}{\sqrt{\lambda}} \approx 3060 \text{ m.s}^{-1}.$$

◊ remarque : la condition géostationnaire donne : $v' = v_e'$ et

$$\text{donc } \frac{v'}{v_e} = \frac{R'}{R_T} \approx 6,6.$$

- Pour atteindre l'orbite géostationnaire à partir de l'orbite rasante, le plus "économique" est de procéder en deux étapes, en passant par une "orbite de transfert".



Pour l'orbite de transfert : $2a = (\lambda + 1) R_T$ donc $E_m'' = -\frac{GM_T m}{(\lambda + 1)R_T}$ (alors que

$E_m = -\frac{GM_T m}{2R_T}$ pour l'orbite rasante) ; il faut donc fournir au début du transfert

$$\text{un excédent d'énergie : } \Delta E_c = E_m'' - E_m = \frac{GM_T m}{2R_T} \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}.$$

Mais avant le transfert : $E_c = -E_m = \frac{GM_T m}{2R_T}$, donc au début du transfert :

$$E_c'' = E_c + \Delta E_c = \frac{GM_T m}{2R_T} \frac{2\lambda}{\lambda + 1} \text{ et } v'' = v_0 \sqrt{\frac{2\lambda}{\lambda + 1}} \approx 10450 \text{ m.s}^{-1}.$$

- De même, il faut fournir à la fin du transfert un excédent d'énergie cinétique :

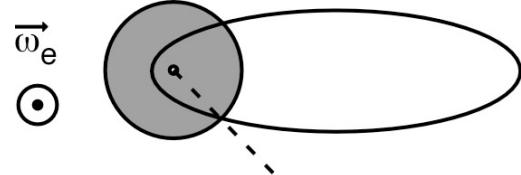
$$\Delta E_c' = E_m' - E_m'' = \frac{GM_T m}{2R_T} \frac{\lambda - 1}{\lambda(\lambda + 1)}.$$

Mais après le transfert : $E_c' = -E_m' = \frac{GM_T m}{2\lambda R_T}$, donc à la fin du transfert :

$$E_c''' = E_c' - \Delta E_c' = \frac{GM_T m}{2R_T} \frac{2}{\lambda(\lambda + 1)} \text{ et } v''' = v_0 \sqrt{\frac{2}{\lambda(\lambda + 1)}} \approx 1580 \text{ m.s}^{-1}.$$

◊ remarque : v_0 avant transfert est supérieure à v' après transfert ; pourtant il faut fournir de l'énergie pendant le transfert car l'augmentation de l'énergie potentielle conduit à une forte diminution de vitesse.

◊ remarque : en pratique on utilise un lancement "oblique" dans \mathcal{R} en effectuant un lancement vertical dans \mathcal{R} tournant.



4.3. Vitesse minimum de "libération"

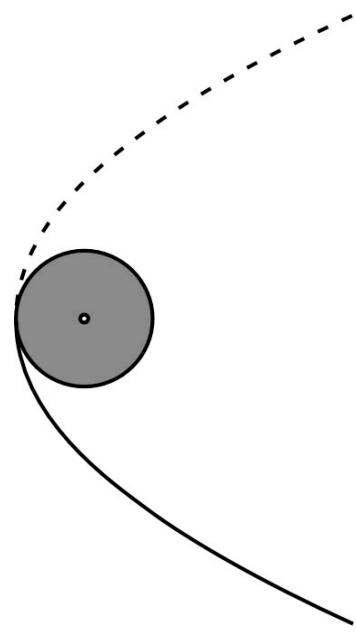
- Pour la trajectoire parabolique ($e = 1$) tangente :

$$E_m = -\frac{GM_T m}{R_T} + \frac{1}{2} mv_L^2 = 0 ; \text{ d'où la vitesse de}$$

$$\text{libération : } v_L = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2g_0 R_T} = 11200 \text{ m.s}^{-1}.$$

On constate que l'intervalle des vitesses de lancement donnant des orbites elliptiques est assez restreint : $v_0 \leq v \leq v_L$ avec $v_L = \sqrt{2} v_0$.

◊ remarque : la vitesse moyenne des molécules de l'atmosphère est $\approx 500 \text{ m.s}^{-1}$ d'où une probabilité d'échappement $P \approx e^{-\Delta E/RT} \approx 10^{-316}$ négligeable.



exercices n° I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX et X.