DYNAMIQUE - PLANÈTES ET SATELLITES - corrigé des exercices

A. EXERCICES DE BASE

I. Décroissance du champ gravitationnel en $1/r^2$

a) Pour un mouvement circulaire, l'accélération est radiale et normale : $a = \frac{v^2}{R'} = \omega^2 R' = \frac{4\pi^2 R'}{T^2}$ (avec $R' \approx 60$ R).

b) Si le mouvement circulaire de la Lune est dû à l'attraction terrestre, alors le champ de gravitation terrestre au niveau de la Lune est $g' = a \approx 2{,}72.10^{-3}$ m.s^{-2}.

c) Ceci donne : $\frac{g'}{g_0} \approx 2{,}78.10^{-4} \approx 60^{-2} \approx \left(\frac{R'}{R}\right)^{-2}$ d'où une décroissance comme $\frac{1}{r^2}$.

II. Trajectoire de la comète de Halley

• D'après la troisième loi de Kepler, le demi-grand-axe (a) et la période (T) vérifient : $\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M}{4\pi^2}$.

◊ remarque : en toute rigueur, l'année ne correspond pas exactement à un tour sur une ellipse car, à cause de différentes perturbations, le grand axe se décale légèrement à chaque tour (il y a un peu plus d'un tour entre deux périhélies successifs) ; en outre, pour des raisons analogues, l'axe des pôles change un peu de direction à chaque révolution autour du Soleil ; ainsi, l'année tropique est définie par le passage au point vernal, quand la direction Soleil-Terre recoupe le plan équatorial (mais la différence est très faible).

• Les calculs sont simplifiés en unités astronomiques puisque pour la Terre : $\frac{{a_0}^3}{{T_0}^2} = \frac{\mathcal{G}M}{4\pi^2}$ avec (par définition) : $a_0 = 1$ U.A. et $T_0 = 1$ an. Par comparaison : $\frac{a}{a_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{2}{3}} = (76{,}03)^{2/3} = 17{,}95$; par suite : $a = 17{,}95$ U.A..

• En notant c la demi-distance entre les foyers de la trajectoire (elliptique), la distance du périhélie est : $a - c = 0{,}59$ U.A. ; par suite : $c = 17{,}36$ U.A.. L'excentricité de l'ellipse est donc : $e = \frac{c}{a} = 0{,}97$ et la distance de l'aphélie est : $a + c = 35{,}31$ U.A..

III. Trajectoire d'un satellite terrestre

1. • D'après la troisième loi de Kepler, le demi-grand-axe (a) et la période (T) vérifient : $\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M}{4\pi^2}$. Par ailleurs pour la Terre : $g_0 = \frac{\mathcal{G}M}{R^2} = 9{,}8$ m.s^{-2} donc $a = \sqrt[3]{\frac{T^2 g_0 R^2}{4\pi^2}} = 7030$ km.

2. • La trajectoire a pour équation : $r = \frac{p}{1+e\cos(\theta)}$; le périgée correspond à : $r' = \frac{p}{1+e} = h' + R =$ $= 6750$ km et l'apogée à : $r'' = \frac{p}{1-e}$; le demi-grand-axe correspond à : $a = \frac{1}{2}(r' + r'') = \frac{p}{1-e^2} = \frac{r'}{1-e}$ d'où on déduit : $e = 1 - \frac{r'}{a} = 4.10^{-2}$.

◊ remarque : pour ne pas redémontrer, on peut aussi utiliser $e = \frac{c}{a}$ avec $c = a - r'$.

• L'apogée est : $r'' = \frac{p}{1-e} = a.(1 + e) = 7310$ km, correspondant à une altitude : $h'' = r'' - R = 910$ km.

IV. Énergie de mise sur orbite

• En orbite à basse altitude, on peut considérer que l'énergie potentielle de pesanteur est pratiquement la même qu'à la surface du sol ; l'énergie à fournir correspond alors essentiellement à une variation d'énergie cinétique.

• "Immobile" au sol, le satellite a initialement une vitesse $v = R\omega = 465$ m.s^{-1} par rapport à un référentiel géocentrique orienté selon les directions d'étoiles "fixes". Pour être en orbite à basse altitude, il doit avoir une période de révolution T telle que : $\frac{R^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M}{4\pi^2}$ avec $g_0 = \frac{\mathcal{G}M}{R^2} = 9{,}8$ m.s^{-2} d'où une vitesse : $v' = R\omega' = \sqrt{Rg_0} = 7920$ m.s^{-1}.

• Pour mettre le satellite en orbite dans le sens de rotation de la Terre, il suffit de faire passer son énergie cinétique de $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ à $E'_c = \frac{1}{2}mv'^2$ d'où une énergie fournie $E' = E'_c - E_c = 2{,}50.10^9$ J.

• Par contre, pour mettre le satellite en orbite dans le sens contraire de la rotation de la Terre, il faut compenser son mouvement initial pour le faire tourner dans l'autre sens (travail résistant non récupérable). Il faut donc fournir $E'' = E_c + E'_c = 2{,}52.10^9$ J.

• L'écart relatif est ainsi : $\frac{\Delta E}{E} \approx \frac{2E_c}{E'_c} = \frac{2v^2}{v'^2} \approx 7.10^{-3}$.

V. Satellite géostationnaire et précision du lancement

1. • Sur une orbite géostationnaire, la vitesse de angulaire est la même que celle de la Terre sur elle-même : $\omega = \frac{2\pi}{T}$ avec T = 1 jour ≈ 86400 s (en fait il s'agit d'un jour sidéral et non d'un jour solaire, mais la différence est négligeable en première approximation), soit : $\omega = 7{,}3.10^{-5}$ rad.s^{-1}.

• Sur la trajectoire géostationnaire, circulaire, l'accélération centripète est : $a_r = \frac{V_0^2}{r_0} = \frac{\mathcal{G}M}{r_0^2}$ donc : $\omega^2 = \left(\frac{V_0}{r_0}\right)^2 = \frac{\mathcal{G}M}{r_0^3}$ (ceci équivaut à la troisième loi de Kepler). Par suite : $r_0 = \sqrt[3]{\frac{\mathcal{G}M}{\omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{gR^2}{\omega^2}}$ en utilisant $g = \frac{\mathcal{G}M}{R^2}$ où R ≈ 6400 km est le rayon terrestre ; ainsi : $r_0 = 42300$ km.

• La vitesse du satellite est par suite : $V_0 = r_0\,\omega = 3080$ m.s^{-1}.

• L'énergie cinétique est : $E_c = \frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{\mathcal{G}Mm}{2r_0}$, l'énergie potentielle est : $E_p = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r_0}$, et l'énergie mécanique est : $E_0 = -\frac{\mathcal{G}Mm}{2r_0} = -E_c$.

2. • On peut étudier d'une façon plus générale l'énergie cinétique en fonction des caractéristiques de la trajectoire ; on peut en particulier utiliser le résultat général démontré en cours pour les trajectoires non circulaires : $E_m = -\frac{\mathcal{G}Mm}{2a}$ (ceci se démontre en considérant la loi des aires et la première formule de Binet, avec l'expression de la trajectoire elliptique en coordonnées polaires).

• On peut écrire : $E_0 = \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{r_0}$ et dans le cas général, au point de lancement ($r = r_0$) : $E_m = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{r_0}$. Mais l'incertitude sur la vitesse : $V = V_0 + \Delta V = V_0\,(1 + \frac{\Delta V}{V_0})$ provoque une incertitude sur l'énergie : $E_m = \frac{1}{2}mV_0^2\,(1 + \frac{\Delta V}{V_0})^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{r_0}$.

• Pour une incertitude ΔV faible : $E_m \approx \frac{1}{2} m V_0^2 + m V_0 \Delta V - \frac{\mathcal{G} Mm}{r_0} = E_0 + m V_0 \Delta V$; mais par ailleurs: $m V_0^2 = \frac{\mathcal{G} Mm}{r_0} = -2 E_0$, donc : $E_m \approx E_0 + m V_0 \Delta V = E_0 (1 - 2 \frac{\Delta V}{V_0})$.

• De : $E_m = -\frac{\mathcal{G} Mm}{2a}$ on tire alors : $a = -\frac{\mathcal{G} Mm}{2E_m} \approx -\frac{\mathcal{G} Mm}{2E_0}(1 + 2\frac{\Delta V}{V_0}) \approx r_0 (1 + 2\frac{\Delta V}{V_0})$.

• Le point de lancement, à l'apogée de la trajectoire de la fusée, correspond à une vitesse radiale nulle ; il correspond donc forcément à l'apogée ou au périgée de l'orbite du satellite. L'équation de la trajectoire : $\frac{1}{r} = \frac{1}{p}[1 + e \cos(\theta)]$ indique que le point de lancement correspond à : $r_0 = \frac{p}{1 \pm e} = a.(1 \pm e)$ suivant le cas (signe de ΔV). Par suite, puisque l'excentricité est positive : $e = \left|1 - \frac{r_0}{a}\right| = 2 \frac{\Delta V}{V_0}$.

3. • De $T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mathcal{G} M}}$ on déduit : $\frac{\Delta T}{T} = \frac{3}{2} \frac{\Delta a}{a}$; mais par ailleurs $\frac{\Delta a}{a} = 1 - \frac{r_0}{a} = 2\frac{\Delta V}{V_0}$, donc : $\frac{\Delta T}{T} = 3 \frac{\Delta V}{V_0}$. Une incertitude maximum de un tour par an correspond à une proportion : $\frac{|\Delta T|}{T} \approx \frac{1}{365}$, c'est-à-dire : $\frac{|\Delta V|}{V_0} \approx \frac{1}{3} \frac{|\Delta T|}{T} \approx 0{,}9.10^{-3}$.

VI. Masse d'une galaxie

• D'après la troisième loi de Kepler : $\frac{r^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G} M}{4\pi^2}$ avec $T = \frac{2\pi r}{v}$ et donc : $M = \frac{r v^2}{\mathcal{G}} = 2{,}8.10^{41}$ kg. Si on compare cette masse à celle du soleil, en supposant que celui-ci est une étoile “moyenne”, on peut penser que l'ordre de grandeur du nombre d'étoiles dans la galaxie est : $N \approx \frac{M}{m} \approx 140$ milliards.

VII. Variante de la méthode de Binet

1. • La conservation du moment cinétique impose un mouvement plan ; en coordonnées polaires dans le plan du mouvement : $\vec{v} = r^\bullet \, \overrightarrow{u_r} + r\theta^\bullet \, \overrightarrow{u_\theta}$.

• En considérant $r^\bullet = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\theta} \theta^\bullet$ avec $\theta^\bullet = Cu^2$ (loi des aires), on obtient $r^\bullet = -\frac{du}{d\theta}$ et $r\theta^\bullet = Cu$. La première formule de Binet est donc : $\vec{v} = C\,(-\frac{du}{d\theta} \overrightarrow{u_r} + u \overrightarrow{u_\theta})$.

• On en déduit : $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m C^2 \left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right)$.

2. • L'énergie mécanique peut s'écrire : $E_m = E_c + E_p$ avec $E_p = -\mathcal{G}\, Mm\, u$.

• La conservation de l'énergie mécanique donne : $E_m^\bullet = 0 = mC^2 \left(\frac{du}{d\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \frac{du}{d\theta}\right)\theta^\bullet - \mathcal{G}\, Mm\, \frac{du}{d\theta}\theta^\bullet$.

• Le mouvement correspond à $mC^2 \frac{du}{d\theta}\theta^\bullet \neq 0$ donc : $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u - \frac{\mathcal{G} M}{C^2} = 0$.

• Les solutions sont de la forme : $u = \frac{1}{r} = \frac{\mathcal{G} M}{C^2}[1 + e \cos(\theta)]$ en prenant comme origine des angles la direction du point le plus proche.

VIII. Vecteur excentricité

1. • La relation fondamentale de la dynamique peut s'écrire (en simplifiant par m) : $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\mathcal{G}M}{r^2}\,\overrightarrow{u_r}$.

• La loi des aires correspond à $C = r^2\theta^\bullet$, donc : $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\mathcal{G}M}{C}\,\theta^\bullet\,\overrightarrow{u_r}$.

• D'après la relation $\overrightarrow{u_\theta}^\bullet = -\theta^\bullet\,\overrightarrow{u_r}$ on en déduit : $\vec{v} = \frac{\mathcal{G}M}{C}\left(\overrightarrow{u_\theta} + \vec{e}\right)$.

2. • La composante orthoradiale de la vitesse est : $r\theta^\bullet = \vec{v}\cdot\overrightarrow{u_\theta} = \frac{\mathcal{G}M}{C}(1 + \vec{e}\cdot\overrightarrow{u_\theta})$.

3. • Compte tenu de la loi des aires : $\frac{1}{r} = \frac{r\theta^\bullet}{C} = \frac{\mathcal{G}M}{C^2}[1 + e\cos(\theta)]$ en prenant comme origine des angles la direction du vecteur excentricité.

IX. Invariant de Laplace-Runge-Lenz

1.a. • En utilisant la propriété $\vec{r}^{\,2} = r^2$, on obtient par dérivation : $2\vec{r}\,\vec{r}^{\,\bullet} = 2rr^\bullet$.

1.b. • On peut considérer : $\overrightarrow{u_r}^\bullet = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{\vec{r}^{\,\bullet}r - \vec{r}r^\bullet}{r^2} = \frac{\vec{r}^{\,\bullet}r^2 - \vec{r}rr^\bullet}{r^3} = \frac{\left(\vec{r}\cdot\vec{r}\right)\vec{r}^{\,\bullet} - \left(\vec{r}\cdot\vec{r}^{\,\bullet}\right)\vec{r}}{r^3} = \frac{\left(\vec{r}\times\vec{r}^{\,\bullet}\right)\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{C}\times\vec{r}}{r^3}$.

2.a. • La relation fondamentale de la dynamique peut s'écrire : $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -\mathcal{G}M\frac{\vec{r}}{r^3}$.

• Par comparaison avec la relation précédente, on en déduit : $-\mathcal{G}M\,\overrightarrow{u_r}^\bullet = \vec{C}\times\vec{a}$.

2.b. • Puisque $\vec{C}$ est constant : $\vec{C}\times\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\vec{C}\times\vec{v}\right)$. On en déduit : $\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\times\vec{C} - \mathcal{G}M\overrightarrow{u_r}\right) = \vec{0}$.

◊ remarque : le vecteur $\vec{R}$ n'est pas indépendant du vecteur excentricité.

3. • On obtient : $\vec{R}\cdot\overrightarrow{u_r} = \left(\vec{v}\times\vec{C}\right)\cdot\overrightarrow{u_r} - \mathcal{G}M = \left(\overrightarrow{u_r}\times\vec{v}\right)\cdot\vec{C} - \mathcal{G}M = \frac{C^2}{r} - \mathcal{G}M$.

• En prenant l'orientation de $\vec{R}$ comme origine des angles, on peut écrire : $\vec{R}\cdot\overrightarrow{u_r} = R\cos(\theta)$. Par comparaison, on obtient : $\frac{1}{r} = \frac{\mathcal{G}M}{C^2}[1 + e\cos(\theta)]$ en posant $e = \frac{R}{\mathcal{G}M}$.

X. Caractéristiques d'une orbite elliptique

1.a. • L'énergie mécanique est initialement $E_m = -\frac{\mathcal{G}Mm}{2R}$ (avec un demi grand-axe $a = R$). La nouvelle valeur (divisée par deux) correspond à un demi grand-axe $a' = 2R$.

1.b. • La trajectoire proposée est incohérente car elle recoupe le cercle : il existerait des points de la nouvelle trajectoire plus proches que la position P initiale. Or, le demi grand-axe ayant augmenté (presque) sans déplacement, le centre de la Terre est forcément le foyer le plus proche du point de changement d'orbite, c'est-à-dire que ce dernier est le périgée ; il est incohérent d'envisager une trajectoire ayant des points plus proches.

2.a. • La poussée tangentielle de courte durée ne modifie pas la distance, donc seule l'énergie cinétique est modifiée : $E'_c = E_c + (E'_m - E_m) = E'_m - E_p = -\frac{\mathcal{G}Mm}{4R} + \frac{\mathcal{G}Mm}{R} = \frac{3}{2}E_c$.

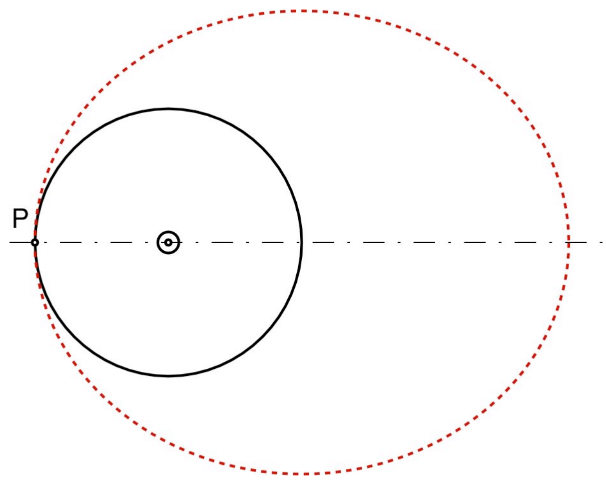
• On en déduit la proportion des vitesses : $v' = \sqrt{\frac{3}{2}}\ v$.

2.b. • Le moment cinétique est relié à constante C de la loi des aires et à la vitesse aréolaire $S^{\bullet} = \frac{\pi ab}{T}$; ainsi : $\sigma = mC = m\frac{2\pi ab}{T}$.

• La troisième loi de Kepler donne par ailleurs : $\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M}{4\pi^2}$; par comparaison : $\sigma = mb\sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{a}}$.

2.c. • Le moment cinétique (constant sur la trajectoire) peut s'écrire : $\sigma = R\,v$ avant le changement d'orbite, puis $\sigma' = R\,v' = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\sigma$ après. Par comparaison : $\frac{b'}{b} = \frac{\sigma'}{\sigma}\sqrt{\frac{a'}{R}} = \sqrt{3}$.

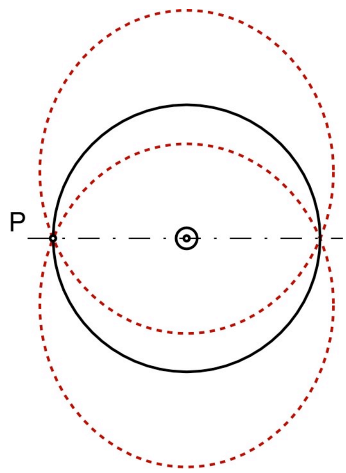
• On en déduit l'allure de la trajectoire :



3.a. • Pour modifier la trajectoire d'une façon qui ne modifie pas le moment cinétique, il est nécessaire et suffisant d'exercer une force centrale. D'après (2.b), on peut préciser que le moment cinétique non modifié impose que b varie proportionnellement à $\sqrt{a}$.

• Le sens de l'action n'est par contre pas évident à étudier car il peut dépendre de la durée cette action. Dans le cas où la durée est très courte (limite idéalisée utilisée ici pour simplifier certains calculs), la force ne modifie pratiquement pas la distance à l'astre (donc l'énergie potentielle) et ne fait qu'augmenter la vitesse (donc l'énergie cinétique). Bien que ce effet soit du second ordre (la vitesse est initialement perpendiculaire à la force), ceci augmente l'énergie mécanique, donc aussi le demi grand-axe (et donc aussi b).

◊ remarque : cela implique une variation d'orientation des axes en relation avec la conclusion de la question (1.b) ; d'après les relations de l'ellipse, le paramètre $p = \frac{b^2}{a} = R$ n'est pas modifié, mais l'excentricité (qui était nulle) augmente : $e' = \sqrt{1-\frac{b'^2}{a'^2}} = \sqrt{1-\frac{R}{a'}} > 0$; l'équation de la trajectoire impose alors : $\frac{1}{R} = \frac{1}{R}\,[1 + e'\cos(\theta)]$ donc $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$.



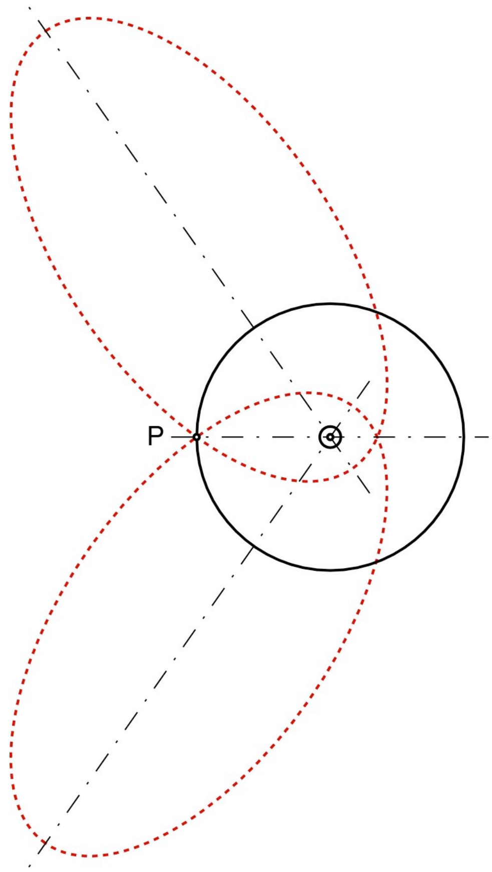
3.b. • On envisage une première action donnant une valeur intermédiaire $a'' = \lambda R$; on obtient ainsi :

$$E''_c = E''_m - E_p = -\frac{\mathcal{G}Mm}{2\lambda R} + \frac{\mathcal{G}Mm}{R} = \frac{2\lambda-1}{\lambda}E_c \;;$$

$$\frac{\sigma''}{\sigma} = \frac{v''}{v} = \sqrt{\frac{2\lambda-1}{\lambda}} \quad ; \quad \frac{b''}{b} = \frac{\sigma''}{\sigma}\sqrt{\frac{a''}{R}} = \sqrt{2\lambda-1}.$$

• Puis on applique la seconde action telle que $\sigma' = \sigma''$ et $\frac{b'}{b''} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda-1}}$ (pour rétablir $b' = b = R$) ; ceci impose : $\frac{a'}{a''} = \frac{1}{2\lambda-1}$.

• Pour obtenir $a' = \frac{\lambda}{2\lambda-1}R = 2R$, il est donc nécessaire et suffisant de choisir $\lambda = \frac{2}{3}$; ceci correspond à un freinage (le bilan énergétique est un gaspillage désastreux).



3.c. • La première action correspond à une force parallèle à la vitesse et de sens contraire ; la seconde action correspond à une force perpendiculaire à la vitesse et peut être orientée vers la Terre ou du côté opposé (les deux sens augmentent le demi grand-axe).

• La combinaison des deux correspond donc à une force orientée entre les deux (avec une coordonnée positive ou négative selon $\vec{u_r}$ et une coordonnée négative selon $\vec{u_\theta}$).

◊ remarque : on peut préciser l'orientation des axes, conformément à la question (1.b) ; les relations de l'ellipse donnent $p' = \frac{b'^2}{a'} = \frac{R}{2}$ et $e' = \sqrt{1-\frac{b'^2}{a'^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; l'équation de la trajectoire impose alors : $\frac{1}{R} = \frac{2}{R}[1 + e'\cos(\theta)]$ donc $\theta = \pm \arccos(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \pm 125°$.

B. EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

XI. Aplatissement du soleil et avance du périhélie

1. • Pour un potentiel gravitationnel de la forme $\phi(r) = -\frac{\mathcal{G}M}{r} - \frac{\beta}{r^3}$ le champ gravitationnel est (dans le plan équatorial) : $\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi = (-\frac{\mathcal{G}M}{r^2} - \frac{3\beta}{r^4})\vec{u_r}$.

• D'après la seconde formule de Binet, l'équation différentielle du mouvement est :

$$m\vec{a} = m\,\ddot{r}\;\vec{u_r} = -mC^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)\vec{u_r} = m\vec{g}$$

qui peut s'écrire : $C^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = \mathcal{G}Mu^2 + 3\beta u^4$ ou encore : $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mathcal{G}M}{C^2} + \frac{3\beta}{C^2}u^2$.

2. • Si on cherche une solution approchée sous la forme : $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{p}[1 + e\cos(\gamma\theta)]$ l'équation différentielle du mouvement correspond à : $\frac{1}{p} + (1-\gamma^2)\frac{e}{p}\cos(\gamma\theta) \approx \frac{\mathcal{G}M + \frac{3\beta}{p^2}}{C^2} + \frac{6e\beta}{p^2C^2}\cos(\gamma\theta)$ (en négligeant le terme en e^2).

• On obtient par identification : $\frac{1}{p} \approx \frac{\mathcal{G}M}{C^2}\,(1 + 3\beta\frac{\mathcal{G}M}{C^4})$ et $(1 - \gamma^2) \approx \frac{6\beta}{pC^2} \approx 6\beta\frac{\mathcal{G}M}{C^4}$ d'où on déduit : $\gamma \approx 1 - 3\beta\frac{\mathcal{G}M}{C^4}$ (≈ 1 dans la limite où le terme correctif est petit) et $\frac{1}{p} \approx \frac{\mathcal{G}M}{\gamma C^2}$.

• Ceci correspond à un mouvement approximativement elliptique, mais tel qu'à chaque période du cosinus (pseudo-période du mouvement) correspond une variation angulaire telle que : $\Delta(\gamma\theta) = 2\pi$, c'est-à-dire : $\Delta\theta = \frac{2\pi}{\gamma} \approx 2\pi\,(1 + 3\beta\frac{\mathcal{G}M}{C^4})$.

• Si on néglige le terme en e^2 (comme dans l'approximation précédente) l'avance du périhélie est :

$$\delta\theta = \Delta\theta - 2\pi = 6\pi\beta\frac{\mathcal{G}M}{C^4} = \frac{6\pi\mathcal{G}^2M^2\varepsilon R_e^{\,2}}{5C^4} = \frac{6\pi\varepsilon R_e^{\,2}}{5p^2} = \frac{6\pi\varepsilon R_e^{\,2}}{5a^2\left(1-e^2\right)^2} \approx \frac{6\pi\varepsilon R_e^{\,2}}{5a^2}.$$

3. • On obtient pour mercure : $\delta\theta = 3{,}0.10^{-8}$ rad pour une pseudo-période. Or, il y a 415 périodes de 88 jours dans un siècle ; donc ceci correspond à une avance du périhélie : $\delta\theta \approx 1{,}2.10^{-5}$ rad = 2,5 " par siècle.

XII. Avance relativiste du périhélie

1. • Si on cherche une solution approchée sous la forme : $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{p}[1 + e\cos(\gamma\theta)]$ l'équation différentielle du mouvement correspond à : $\frac{1}{p} + (1 - \gamma^2)\frac{e}{p}\cos(\gamma\theta) \approx \frac{\mathcal{G}M}{C^2} + \frac{3\mathcal{G}M}{c_0^{\,2}p^2} + \frac{6e\mathcal{G}M}{c_0^{\,2}p^2}\cos(\gamma\theta)$ (en négligeant le terme en e^2).

• On obtient par identification : $\frac{1}{p} \approx \frac{\mathcal{G}M}{C^2}\,[1 + 3\left(\frac{\mathcal{G}M}{Cc_0}\right)^2]$ et $(1 - \gamma^2) \approx \frac{6\mathcal{G}M}{c_0^{\,2}p} \approx 6\left(\frac{\mathcal{G}M}{Cc_0}\right)^2$ d'où on déduit : $\gamma \approx 1 - 3\left(\frac{\mathcal{G}M}{Cc_0}\right)^2$ (≈ 1 dans la limite où le terme correctif est petit) et $\frac{1}{p} \approx \frac{\mathcal{G}M}{\gamma C^2}$.

• Ceci correspond à un mouvement approximativement elliptique, mais tel qu'à chaque période du cosinus (pseudo-période du mouvement) correspond une variation angulaire telle que : $\Delta(\gamma\theta) = 2\pi$, c'est-à-dire : $\Delta\theta = \frac{2\pi}{\gamma} \approx 2\pi\,[1 + 3\left(\frac{\mathcal{G}M}{Cc_0}\right)^2]$. L'avance du périhélie est donc : $\delta\theta = \Delta\theta - 2\pi = 6\pi\left(\frac{\mathcal{G}M}{Cc_0}\right)^2$.

• Pour une trajectoire elliptique, on établit les relations : $p = a.(1 - e^2) = \frac{C^2}{\mathcal{G}M}$; $e = \frac{c}{a}$; $b^2 = p\,a$; $C = \frac{2\pi ab}{T}$; on en déduit : $\delta\theta = \frac{24\pi^3a^2}{T^2c_0^{\,2}\left(1-e^2\right)} \approx \frac{24\pi^3a^2}{T^2c_0^{\,2}}$ si on néglige le terme en e^2 comme cela a été fait dans l'approximation précédente.

2. • On obtient pour mercure : $\delta\theta = 5{,}0.10^{-7}$ rad pour une pseudo-période. Or, il y a 415 périodes de 88 jours dans un siècle ; donc ceci correspond à une avance du périhélie : $\delta\theta \approx 2{,}0.10^{-4}$ rad = 43 " par siècle.