DYNAMIQUE - PLANÈTES ET SATELLITES - exercices

A. EXERCICES DE BASE

I. Décroissance du champ gravitationnel en $1/r^2$

• La Lune tourne autour de la Terre d'un tour en 27,3 jours ; le rayon de son orbite (quasi-constant) est environ 60 fois le rayon terrestre.

a) Quelle est l'accélération de la Lune dans ce mouvement circulaire ?

◊ remarque : il faut calculer sans utiliser la loi de force newtonienne car le but de l'énoncé est de la démontrer.

b) Quel est le champ de gravitation terrestre au niveau de la Lune ?

c) Montrer que cela correspond à une décroissance en $\frac{1}{r^2}$ du champ de gravitation terrestre (preuve due à Newton).

Données : rayon terrestre : R = 6400 km ; pesanteur à la surface de la Terre : $g_0 = 9,8\ m.s^{-2}$.

II. Trajectoire de la comète de Halley

• La comète de Halley a un mouvement de période 76,03 années ; son périhélie (point de la trajectoire le plus proche du soleil) est à 0,59 UA du soleil (l'unité astronomique UA correspond au demi-grand-axe de l'orbite terrestre). Calculer, en UA, le demi-grand-axe de la trajectoire de la comète, son excentricité et la distance de son aphélie (point de la trajectoire le plus loin du soleil).

III. Trajectoire d'un satellite terrestre

• Un satellite terrestre a un mouvement de période 5843 s ; son périgée (point de la trajectoire le plus proche de la Terre) est à 350 km d'altitude.

1. • Calculer le demi-grand-axe de sa trajectoire.

2. • Calculer l'excentricité de la trajectoire et l'altitude de son apogée (point de la trajectoire le plus loin de la Terre).

Données : rayon terrestre : R = 6400 km ; pesanteur à la surface de la Terre : $g_0 = 9,8\ m.s^{-2}$.

IV. Énergie de mise sur orbite

• Un satellite de masse m décrit une orbite circulaire à basse altitude dans le plan de l'équateur. En supposant qu'il ait été lancé d'un point situé sur l'équateur, calculer l'énergie qu'il a fallu fournir à ce satellite pour le mettre sur orbite, en distinguant les deux sens possibles de rotation sur la trajectoire. Calculer l'écart relatif $\frac{\Delta E}{E}$.

• Application numérique : m = 80 kg ; R ≈ 6400 km.

V. Satellite géostationnaire et précision du lancement

• A partir d'une fusée arrivant à l'apogée de sa trajectoire, à une distance r_0 du centre de la Terre, on veut lancer un satellite de masse m sur une orbite circulaire de rayon r_0 en lui communiquant la vitesse qui convient : horizontale et de norme V_0.

1. • Calculer V_0 et l'énergie mécanique E_0 du satellite sur cette orbite.

2. • Au moment du lancement, le rayon est bien $r = r_0$, mais la vitesse n'est pas exactement la vitesse souhaitée : $V = V_0 + \Delta V$ avec $|\Delta V| \ll V_0$. Calculer le demi-grand-axe (a) et l'excentricité (e) de la trajectoire en fonction de r_0 et de $\frac{\Delta V}{V}$ (on peut par exemple utiliser l'expression de l'énergie).

3. • Calculer l'écart relatif sur la période (par rapport à la période "géostationnaire" souhaitée). Quelle valeur maximum de $\frac{|\Delta V|}{V}$ peut-on tolérer pour un satellite géostationnaire si on veut que sa rotation apparente n'excède pas un tour par an ?

VI. Masse d'une galaxie

• Des méthodes basées sur la photométrie permettent de déterminer la distance des galaxies ; la mesure du rayon apparent permet alors de déterminer le rayon des orbites des étoiles composant la galaxie. La vitesse des étoiles est peut être mesurée par effet Doppler.

• On a ainsi mesuré, pour une étoile à la périphérie d'une galaxie, le rayon de l'orbite $r = 3.10^{17}$ km et la vitesse $v = 250\ \text{km.s}^{-1}$. En appliquant la troisième loi de Kepler à l'étoile, considérée comme attirée vers le centre de la galaxie par l'ensemble de la masse de celle-ci, en déduire la masse de la galaxie et la comparer à celle du soleil.

Données : constante de la gravitation : $\mathcal{G} = 6{,}67.10^{-11}\ \text{N.m}^2.\text{kg}^{-2}$; masse du soleil : $m = 2.10^{30}$ kg.

VII. Variante de la méthode de Binet

1. • On considère un satellite de masse m en mouvement autour d'un astre de masse M. En utilisant la première formule de Binet (pour la vitesse), en fonction de $u = \frac{1}{r}$, montrer que l'énergie cinétique peut s'écrire : $E_c = \frac{1}{2} m C^2 \left(\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right)$.

2. • D'après la conservation de l'énergie mécanique, en déduire l'équation de la trajectoire :

$$\frac{1}{r} = \frac{\mathcal{G}M}{C^2}[1 + e\cos(\theta)].$$

VIII. Vecteur excentricité

1. • On considère un satellite de masse m en mouvement autour d'un astre de masse M. En intégrant la relation fondamentale de la dynamique, montrer que la vitesse du satellite vérifie la loi : $\vec{v} = \frac{\mathcal{G}M}{C}\left(\overrightarrow{u_\theta} + \vec{e}\right)$ où C est la constante de la loi des aires et où la constante d'intégration $\vec{e}$ est nommée “vecteur excentricité”.

2. • Montrer que la composante orthoradiale de la vitesse est : $r\dot{\theta} = \frac{\mathcal{G}M}{C}(1 + \vec{e}\cdot\overrightarrow{u_\theta})$.

3. • Compte tenu de la loi des aires, en déduire l'équation de la trajectoire : $\frac{1}{r} = \frac{\mathcal{G}M}{C^2}[1 + e\cos(\theta)]$.

IX. Invariant de Laplace-Runge-Lenz

1. • On considère un satellite de masse m en mouvement autour d'un astre de masse M. Pour étudier le mouvement, on repère le satellite par le vecteur position $\vec{r} = r\,\vec{u_r}$.

a) Justifier que : $\vec{r}\,\dot{\vec{r}} = r\dot{r}$.

b) Montrer que : $\dot{\vec{u_r}} = \dfrac{\vec{C}\times\vec{r}}{r^3}$ où $\vec{C} = \vec{r}\times\vec{v}$ est la constante de la loi des aires.

☞ indication : on peut utiliser la propriété vectorielle : $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} = \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}$.

2. a) Compte tenu de la relation fondamentale de la dynamique, montrer que : $-\mathcal{G}M\dot{\vec{u_r}} = \vec{C}\times\vec{a}$.

b) En déduire que le vecteur $\vec{R} = \vec{v}\times\vec{C} - \mathcal{G}M\vec{u_r}$ est une constante du mouvement.

3. • En calculant $\vec{R}\cdot\vec{u_r}$, en déduire l'équation de la trajectoire : $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\mathcal{G}M}{C^2}[1 + e\cos(\theta)]$.

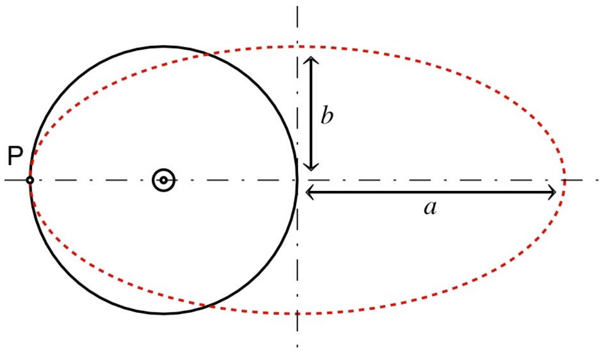
X. Caractéristiques d'une orbite elliptique

1. • On considère un satellite terrestre, sur une orbite circulaire de rayon R.

• Afin de changer d'orbite, on fait fonctionner le moteur pour exercer une poussée parallèle au mouvement ; ceci a pour effet d'augmenter la vitesse. On suppose la durée de cette action assez courte pour que le déplacement soit négligeable en comparaison de la taille de l'orbite.

a) On suppose que l'énergie mécanique devient $E'_m = \dfrac{1}{2}E_m$; en déduire le demi grand-axe a' de la nouvelle trajectoire.

b) On se propose de tracer l'allure de cette trajectoire ; justifier que la représentation suivante est incohérente.



2. • On se propose de préciser la forme de la trajectoire.

a) D'après ce qui précède, établir la relation entre la vitesse v sur la trajectoire circulaire et la vitesse v' sur la nouvelle trajectoire, juste après de changement d'orbite.

b) Montrer que le moment cinétique algébrique est $\sigma = mb\sqrt{\dfrac{\mathcal{G}M}{a}}$, où b est le demi petit-axe.

c) En déduire l'expression de b' pour la nouvelle trajectoire. Tracer l'allure de cette dernière.

3. • On souhaite chercher s'il est possible d'augmenter a sans augmenter b (d'une façon qui correspond à l'allure de trajectoire ci-dessus).

a) Est-il possible de modifier la trajectoire en exerçant une action qui ne modifie pas le moment cinétique ? Préciser l'action nécessaire pour augmenter ou diminuer le demi grand-axe.

b) En combinant une succession de deux actions (dont l'ensemble est supposé assez bref), l'une du type étudié dans les parties (1) et (2) puis l'autre du type étudié dans la question (3.a), montrer qu'on peut obtenir $a' = 2R$ avec $b' = b$. Préciser les caractéristiques des deux actions nécessaires pour cela.

c) On souhaite effectuer globalement les deux actions envisagées en exerçant une force oblique par rapport à la vitesse en P. Indiquer qualitativement l'orientation de cette force.

B. EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

XI. Aplatissement du soleil et avance du périhélie

• Dans le plan équatorial d'une étoile de masse M, de rayon polaire R_p et de rayon équatorial R_e, le potentiel gravitationnel est donné approximativement par l'expression :

$$\phi(r) \approx -\frac{\mathcal{G}M}{r} - \frac{\mathcal{G}M\varepsilon R_e^2}{5r^3} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \frac{R_e - R_p}{R_e}.$$

• Pour le soleil : $R_e = 6{,}96.10^8$ m et $\varepsilon = 5.10^{-5}$; on pose par ailleurs pour simplifier : $\beta = \frac{\mathcal{G}M\varepsilon R_e^2}{5}$.

1. • Écrire l'équation du mouvement d'une planète dans le plan équatorial (en coordonnées polaires).

2. • Montrer qu'on peut trouver une constante γ telle qu'une solution du type : $\frac{1}{r} = \frac{1}{p}[1 + e\cos(\gamma\theta)]$ convient si on néglige le terme en e^2 (l'excentricité des trajectoires est toujours faible pour les planètes, contrairement aux comètes...). Calculer γ et vérifier que $\gamma \approx 1$.

• Montrer qu'un tel mouvement correspond à une trajectoire elliptique dont les axes tournent lentement. Exprimer l'avance $\delta\theta$ du périhélie (c'est-à-dire l'angle de rotation des axes) pour une révolution de la planète, en fonction de ε, e, R_e et du demi-grand-axe de la trajectoire (a).

3. • La période de révolution de mercure est T = 88 jours, son excentricité est $e = 0{,}21$ et le demi-grand-axe de son orbite est $a = 58.10^6$ km. Calculer l'avance de son périhélie provoquée en un siècle par l'aplatissement du soleil.

XII. Avance relativiste du périhélie

• Dans la théorie de la relativité générale, l'équation du mouvement d'une planète peut s'écrire : $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mathcal{G}M}{C^2} + \frac{3\mathcal{G}M}{c_0^3}u^2$ avec $u = \frac{1}{r}$ et $c_0 = 3.10^8$ m.s^{-1} (vitesse de la lumière dans le vide).

1. • Montrer qu'on peut trouver une constante γ telle qu'une solution du type : $\frac{1}{r} = \frac{1}{p}[1 + e\cos(\gamma\theta)]$ convient si on néglige le terme en e^2 (l'excentricité des trajectoires est toujours faible pour les planètes, contrairement aux comètes...). Calculer γ et vérifier que $\gamma \approx 1$.

• Montrer qu'un tel mouvement correspond à une trajectoire elliptique dont les axes tournent lentement. Exprimer l'avance $\delta\theta$ du périhélie (c'est-à-dire l'angle de rotation des axes) pour une révolution de la planète, en fonction de c_0, e, de la période (T) et du demi-grand-axe (a) de la trajectoire.

2. • La période de révolution de mercure est T = 88 jours, son excentricité est $e = 0{,}21$ et le demi-grand-axe de son orbite est $a = 58.10^6$ km. Calculer l'avance de son périhélie provoquée en un siècle par l'effet relativiste.