M. IX - DYNAMIQUE ; SYSTÈMES DE POINTS

1. Éléments cinétiques d'un système de points

• Le centre d'inertie G (ou barycentre des masses) d'un système de points $\{M_i\}$ peut être défini par : $\left(\sum m_i\right)\overrightarrow{OG} = \sum\left(m_i\,\overrightarrow{OM_i}\right)$, ou aussi : $\sum\left(m_i\,\overrightarrow{GM_i}\right) = \vec{0}$.

On en déduit par dérivation la quantité de mouvement totale du système, aussi appelée "résultante cinétique" : $\vec{p} = \sum\vec{p_i} = \sum\left(m_i\,\vec{v_i}\right) = \left(\sum m_i\right)\vec{v}_G$.

• La situation est un peu différente pour les rotations : le moment cinétique $\vec{\sigma}_O = \sum\vec{\sigma}_{iO} = \sum\left(\overrightarrow{OM_i}\times\vec{p_i}\right)$ est généralement différent de $\overrightarrow{OG}\times\vec{p}$.

◊ remarque : par contre, si tous les $\vec{v_i}$ sont égaux $(\vec{v_i} = \vec{v}_G)$, alors on peut écrire : $\vec{\sigma}_O = \sum\left(\overrightarrow{OM_i}\times m_i\vec{v_i}\right) = \sum\left(m_i\,\overrightarrow{OM_i}\right)\times\vec{v}_G = \overrightarrow{OG}\times\vec{p}$; la condition pour qu'un système puisse être représenté par un point matériel est donc que tous les $\vec{v_i}$ soient égaux (ni déformation, ni rotation : solide en translation).

• Le changement de centre de référence correspond à :

$$\vec{\sigma}_{O'} = \sum\left(\overrightarrow{O'M_i}\times\vec{p_i}\right) = \overrightarrow{O'O}\times\sum\vec{p_i} + \sum\left(\overrightarrow{OM_i}\times\vec{p_i}\right) = \overrightarrow{O'O}\times\vec{p} + \vec{\sigma}_O.$$

◊ remarque : la condition pour qu'un système puisse être représenté par un point matériel est donc qu'il existe un point G tel que $\vec{\sigma}_G = \vec{0}$; ceci conduit alors en effet à $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OG}\times\vec{p}$.

• De même pour l'énergie cinétique : $E_c = \sum E_{ci} = \sum\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right) = \sum\frac{p_i^2}{2m_i}$ est généralement différent de $\frac{1}{2}\left(\sum m_i\right)v_G^2 = \frac{p^2}{2\sum m_i}$.

◊ remarque : par contre, si tous les $\vec{v}_i$ sont égaux (et donc égaux à $\vec{v}_G$), alors on peut écrire : $E_c = \sum E_{ci} = \sum \left(\frac{1}{2} m_i {v_i}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\sum m_i\right) {v_G}^2$.

🕮 *exercices n° I et II.*

2. Éléments résultants des forces

• Puisque les forces intérieures se compensent deux à deux (actions réciproques), la "résultante dynamique" (somme des forces exercées sur le système) est égale à la somme des forces "extérieures" : $\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \sum_{ext} \vec{F}_i$.

• La situation est analogue mais un peu moins évidente pour le "moment dynamique" (somme des moments des forces exercées sur le système) ; en effet, deux forces opposées n'ont pas forcément des moments opposés (ils peuvent même être égaux) : tout dépend des droites d'action.

Si les M_i sont des points matériels (en particulier sans effet magnétique), alors les actions réciproques intérieures opposées ont de plus même droite d'action (parallèle à leur direction commune) ; par suite leurs moments sont opposés : $\vec{\mathcal{M}}_{12} + \vec{\mathcal{M}}_{21} = \overrightarrow{OM_1} \times \vec{F}_{21} + \overrightarrow{OM_2} \times \vec{F}_{12} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{F}_{12} = \vec{0}$.

On obtient alors : $\vec{\mathcal{M}}_O = \sum \vec{\mathcal{M}}_{i\,O} = \sum_{ext} \vec{\mathcal{M}}_{i\,O}$.

• Le changement de point de référence correspond à :

$$\vec{\mathcal{M}}_{O'} = \sum\left(\overrightarrow{O'M_i} \times \vec{F}_i\right) = \sum\left(\overrightarrow{O'O} \times \vec{F}_i\right) + \sum\left(\overrightarrow{OM_i} \times \vec{F}_i\right) = \overrightarrow{O'O} \times \vec{F} + \vec{\mathcal{M}}_O.$$

3. Théorèmes de la dynamique des systèmes

• Dans un référentiel galiléen, le principe fondamental de la dynamique peut se généraliser en un "théorème de la résultante cinétique" (ou "théorème du centre d'inertie") : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_i = \sum_{ext} \vec{F}_i = \vec{F}$.

• D'une façon analogue, dans un référentiel galiléen, le principe fondamental de la dynamique de rotation se généralise en un "théorème du moment cinétique" : par rapport à un point O fixe : $\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_i}_O = \sum_{ext} \overrightarrow{\mathcal{M}_i}_O = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O$.

Mais, cas particulier "exceptionnel", ceci se généralise aussi par rapport au barycentre G (mobile) : $\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_i}_G - \vec{v}_G \times \sum \vec{p}_i = \sum_{ext} \overrightarrow{\mathcal{M}_i}_G = \overrightarrow{\mathcal{M}}_G$.

• La situation est analogue pour l'énergie cinétique (dans un référentiel galiléen) : $dE_c = \sum \delta W_i$; mais il n'y a en général pas compensation des travaux des forces intérieures.

Pour un système sans déformation, si les M_i sont des points matériels, alors les actions réciproques intérieures (opposées) ont une même droite d'action (selon leur direction commune) ; donc leurs travaux sont opposés :

$$\delta W_1 + \delta W_2 = \vec{F}_{21} \cdot d\overrightarrow{OM_1} + \vec{F}_{12} \cdot d\overrightarrow{OM_2} = \vec{F}_{12} \cdot d\overrightarrow{M_1M_2}.$$

Par ailleurs, pour M_1M_2 constant : $\overrightarrow{M_1M_2} \cdot d\overrightarrow{M_1M_2} = 0$, or $\vec{F}_{12} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$ donc $\delta W_1 + \delta W_2 = 0$; on obtient alors : $dE_c = \sum_{ext} \delta W_i$.

◊ remarque : le travail des forces intérieures est donc indépendant du référentiel, puisque tout changement ne fait qu'ajouter une translation et une rotation d'ensemble sans déformation supplémentaire, d'où une contribution nulle.

◊ remarque : dans un référentiel non galiléen, il faut tenir compte des travaux des forces d'inertie d'entraînement ; par contre, les forces d'inertie complémentaires $\vec{f}_{ci} = -2m_i \vec{\omega} \times \vec{v}_i'$ ne travaillent pas.

📖 *exercices n° III, IV, V et VI.*

4. Référentiel barycentrique

• On appelle "référentiel barycentrique" le référentiel d'origine G, en translation (quelconque) par rapport à un référentiel galiléen.

L'intérêt du référentiel barycentrique, généralement non galiléen, est de séparer l'étude du mouvement d'un système en une translation d'ensemble et une rotation-déformation par rapport à G.

◊ remarque : dans le référentiel barycentrique, la propriété $\vec{p}^* = \vec{0}$ impose que le moment cinétique $\vec{\sigma}^*$ y est indépendant du point de référence ; d'un autre point de vue, cela impose que le travail des forces intérieures y est nul.

◊ remarque : une autre particularité utile est la propriété : $\vec{\sigma}^*_G = \vec{\sigma}_G$; on en déduit : $\frac{d\vec{\sigma}^*_G}{dt} = \sum_{ext} \vec{\mathcal{M}}_{i\,G} = \vec{\mathcal{M}}_G$, sans forces d'inertie, même si le référentiel barycentrique n'est pas galiléen (ceci revient à dire que la somme des moments des forces d'inertie est toujours nulle).

5. Solide en rotation autour d'un axe fixe

• Pour un point en rotation autour d'un point O (à distance $OM = r$ constante), on obtient : $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \times m\vec{v} = m\, r^2\, \vec{\omega}$; on peut alors définir un "moment d'inertie" $J = m\, r^2$ et écrire : $\vec{\sigma}_O = J\, \vec{\omega}$; $\sum \vec{\mathcal{M}}_O = J \frac{d\vec{\omega}}{dt}$;

$$\overline{\sigma_\Delta} = J\, \omega \; ; \; \sum \overline{\mathcal{M}}_\Delta = J \frac{d\omega}{dt}.$$

Pour l'ensemble des points constituant un solide en rotation autour d'un axe fixe, en raisonnant avec des coordonnées cylindriques selon cet axe : $\vec{\sigma}_{Oi} = m_i\, r_i^2\, \vec{\omega}$. On peut alors généraliser les lois précédentes en définissant un moment d'inertie total $J = \sum \left(m_i\, r_i^2\right)$.

• En pratique, il faut toutefois généralement calculer la somme par intégration ; ainsi pour un cylindre homogène, de rayon R et de longueur L, tournant selon son axe : $J = \iiint \mu\, r^2\, d\tau = \mu \,.\int_0^R r^3\, dr \,.\int_0^{2\pi} d\theta \,.\int_0^L dz = \mu \,.\,\frac{1}{4}\, R^4.2\pi.L.$

Ceci peut s'écrire en fonction de la masse du cylindre : $M = \mu \,.\,\frac{1}{2}\, R^2.2\pi.L$; on obtient ainsi : $J = \frac{1}{2}\, M\, R^2$.

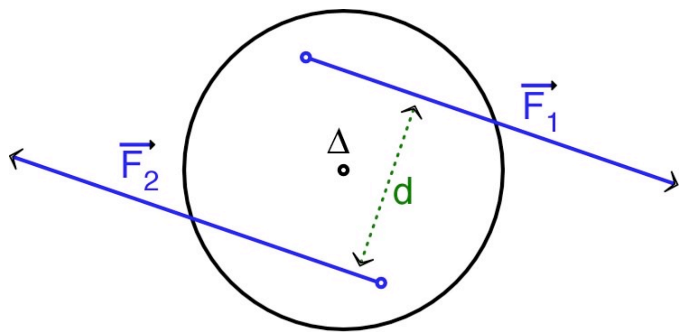
• On peut aussi raisonner sur l'énergie cinétique :

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM_i} = r_i\, \omega\, \overrightarrow{u_{\theta i}} \quad ; \quad E_{ci} = \frac{1}{2}\, m_i\, r_i^2\, \omega^2 \quad ; \quad E_c = \frac{1}{2}\, J\, \omega^2.$$

• D'un autre point de vue, lorsqu'on utilise des pièces mécaniques rotatives, on diminue l'usure et on améliore l'efficacité en “équilibrant” le dispositif :

◊ centre d'inertie et axe de symétrie selon l'axe de rotation ;

◊ interactions par des “couples de forces” symétriques de somme nulle (sur l'exemple suivant : $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$; $\sum \overline{\mathcal{M}_\Delta} = \Gamma = -F.d$).



📖 *exercice n° VII.*

6. Théorème du viriel

• On considère un système de N points matériels en interaction gravitationnelle (pouvant décrire une galaxie, un amas de galaxies...), supposé en équilibre statistique. Ce système est supposé rester borné ; il est étudié par rapport à son référentiel barycentrique, présumé quasi galiléen.

En notant $\vec{r}_i = \overrightarrow{GM_i}$ le moment d'inertie $J = \sum \left(m_i\, r_i^2\right) = \sum \left(m_i\, \vec{r}_i^{\,2}\right)$ est tel que : $\frac{1}{2}\,\frac{d^2J}{dt^2} = \sum \left(m_i\, \vec{r}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i\right) + \sum \left(m_i\, \dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right)$.

Or, pour un système borné en équilibre statistique, on obtient en moyenne dans le temps : $\left\langle \frac{d^2J}{dt^2} \right\rangle = \lim\limits_{t' \to \infty} \left[\frac{1}{t'} \int_0^{t'} \frac{d^2J}{dt^2}(t)\, dt \right] = 0$.

• On peut de plus considérer : $\left\langle \sum \left(m_i\, \vec{r}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i\right) \right\rangle = \left\langle \sum \left(\vec{F}_i \cdot \vec{r}_i\right) \right\rangle$ où les forces peuvent s'écrire : $\vec{F}_i = -\sum\limits_{j \neq i} \left(\mathcal{G}\, m_i\, m_j\, \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|^3} \right)$.

Ainsi, en combinant les indices :

$$\sum_i \left(\vec{F}_i \cdot \vec{r}_i\right) = -\sum_{i,j \neq i} \left(\mathcal{G}\, m_i\, m_j\, \frac{\vec{r}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|^3} \right) = -\sum_{j,i \neq j} \left(\mathcal{G}\, m_j\, m_i\, \frac{\vec{r}_j \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{\left|\vec{r}_j - \vec{r}_i\right|^3} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \left(\mathcal{G}\, m_i\, m_j \left(\frac{\vec{r}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|^3} + \frac{\vec{r}_j \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{\left|\vec{r}_j - \vec{r}_i\right|^3} \right) \right) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \left(\mathcal{G}\, m_i\, m_j\, \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|^3} \right) \;;$$

$$\sum_i \left(\vec{F}_i \cdot \vec{r}_i\right) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \left(\frac{\mathcal{G}\, m_i\, m_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|} \right) = \frac{1}{2} \sum_i \left(m_i\, \mathcal{V}_i\right) = E_p.$$

◊ remarque : en faisant la somme des énergies potentielles d'interaction des masses m_i on compte deux fois les interactions des paires (ij).

• Par ailleurs : $\sum \left(m_i\, \dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right) = 2\, E_c$; donc au total : $0 = \langle E_p \rangle + 2\, \langle E_c \rangle$.

Ceci généralise une propriété déjà remarquée pour un satellite en orbite circulaire : $E_p = -2\, E_c$ (où ces énergies sont dans ce cas constantes).