DYNAMIQUE - SYSTÈMES DE POINTS - exercices

A. EXERCICES DE BASE

I. Poussah

• On colle la base d'un cylindre de rayon R et de hauteur h sur la face plane limitant une demi-sphère de même rayon R, de façon que l'axe du cylindre passe par le centre de la sphère. Le cylindre est homogène de masse volumique ρ_1 et la demi-sphère est homogène de masse volumique ρ_2.

a) Calculer la hauteur h du cylindre telle que le centre d'inertie de l'ensemble coïncide avec le centre de la sphère.

◊ indication : le centre d'inertie d'une demi-sphère se situe (par rapport au centre O de la demi-sphère) à une distance $OG = \frac{3}{8}R$.

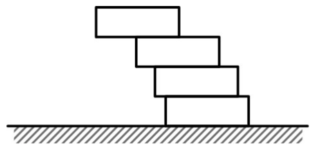
b) Application numérique : $\rho_1 = 0{,}8\ g.cm^{-3}$ (bois) ; $\rho_2 = 11{,}3\ g.cm^{-3}$ (plomb) ; R = 1 cm.

c) À quoi correspond cette condition du point de vue de l'équilibre ?

II. Équilibre

• Sur une table horizontale on pose des morceaux de sucre identiques les uns sur les autres. En les décrivant par une numérotation à partir du plus élevé : le premier tient en équilibre sur le second s'il dépasse de moins de la moitié de sa longueur ; à quelle condition l'ensemble des deux premiers tient-il en équilibre sur le troisième ?

• En raisonnant de la même façon de proche en proche, quel nombre minimum de morceaux de sucre faut-il disposer sur la table pour que la projection du premier sur le plan horizontal soit entièrement extérieure au dernier morceau (qui est au contact de la table) ?



III. Centre d'inertie

• Une barque de masse m flotte immobile sur l'eau ; le frottement de son fond plat sur l'eau est supposé négligeable quel que soit le mouvement. Le centre d'inertie de la barque est noté G.

• Dans cette barque se trouvent deux personnes représentées par des points matériels A et B de masses m_A et m_B. Les points A, B et G sont initialement alignés, avec AB = L.

• Les deux personnes permutent leurs positions ; calculer le déplacement d du point G.

IV. Quantité de mouvement totale

• Deux chariots de masses m_1 et m_2, mobiles sur un banc à coussin d'air horizontal, comportent l'un un aimant et l'autre un morceau de fer. On les lâche à la distance d l'un de l'autre avec des vitesses initiales nulles. En supposant qu'après le choc ils restent solidaires, quelle sera la vitesse de l'ensemble ?

V. Énergie mécanique

• Deux points matériels de masses m_1 et m_2 glissent sans frottement sur un axe horizontal Ox ; leurs positions sont repérées par x_1 et x_2. Ces deux points sont liés par un ressort de raideur k, de masse négligeable et de longueur au repos ℓ_0. On écarte les deux points de leur position d'équilibre et on les lâche avec une vitesse initiale nulle.

1. • Écrire l'équation différentielle du mouvement de chacun des points.

2. • En déduire l'équation du mouvement du barycentre G ; quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

3. • En multipliant la première équation par $\dot{x}_1$ et la seconde par $\dot{x}_2$, mettre en évidence la conservation de l'énergie mécanique E_m du système, et donner son expression.

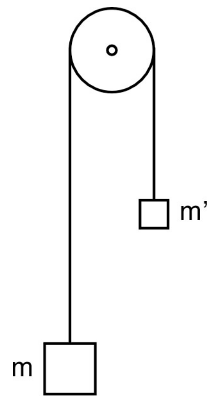
4. • En multipliant la première équation par m_2 et la seconde par m_1, montrer que par différence on en tire une équation différentielle simple sur la variable $\xi = x_2 - x_1 - \ell_0$. En déduire la période T des oscillations du système.

VI. Travail des forces intérieures et changement de référentiel

• On considère un changement de référentiel associé à une translation de l'origine à la vitesse $\vec{v}_0$ et à une rotation des vecteurs de base à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ par rapport à O.

• Montrer que, pour un système de points matériels, la puissance et le travail des forces intérieures ne sont pas modifiés par le changement de référentiel.

VII. Machine d'Atwood



1. • On considère une “machine d'Atwood” constituée de deux blocs, représentés par des points matériels M et M' (de masses m et m'), reliés par un fil “idéal” (inextensible et de masse négligeable) passant par une poulie de rayon R et de moment d'inertie J.

• En raisonnant d'après le moment cinétique, établir l'équation différentielle décrivant le mouvement du système.

B. EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

VIII. Travail des forces d'inertie et référentiel barycentrique

• Montrer que, pour un système de points matériels, la puissance et le travail des forces d'inertie sont nuls dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$.

IX. Centre d'inertie

1. • On considère une tige mince homogène en forme de demi-cercle de rayon R. Déterminer la position du centre d'inertie par rapport au diamètre qui limite le demi-cercle.

2. • On considère un demi-cylindre homogène de rayon R. Déterminer la position du centre d'inertie par rapport au plan méridien qui limite le demi-cylindre.

X. Théorèmes de Kœnig

• L'intérêt du référentiel barycentrique est de séparer l'étude du mouvement d'un système en une translation d'ensemble (déplacement de G) et une rotation-déformation par rapport à G. Les théorèmes de Kœnig consistent à exprimer $\vec{\sigma}_O$ et E_c (dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen) en fonction de $\vec{\sigma}^*_G$ et E^*_c (dans le référentiel $\mathcal{R}^*$ barycentrique).

1. a) Dans $\mathcal{R}$ galiléen, montrer que le changement de référence correspond à : $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OG} \times \vec{p} + \vec{\sigma}_G$.

b) Montrer que par ailleurs : $\vec{\sigma}_G = \vec{\sigma}^*_G$ et en déduire finalement : $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OG} \times \vec{p} + \vec{\sigma}^*_G$.

2. • D'une façon analogue, montrer que : $E_c = \frac{1}{2}\left(\sum m_i\right) v_G^{\,2} + E^*_c$.

XI. Énergie cinétique et moment cinétique

• Compte tenu des proportions, on assimile la Terre et la Lune à deux points matériels de masses m_1 et m_2. La distance Terre-Lune, notée ℓ, est considérée comme constante : on admet que ces deux points décrivent des orbites circulaires autour de leur barycentre G à la vitesse angulaire constante ω (mesurée par rapport à des directions fixes d'un référentiel galiléen).

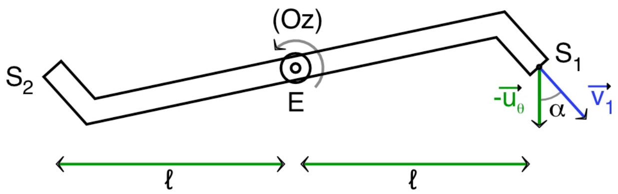
• Le barycentre G décrit autour du Soleil, supposé fixe à l'origine O, une orbite considérée comme circulaire de rayon A, à la vitesse angulaire constante Ω. Les deux mouvements sont supposés coplanaires et les deux rotations ont lieu dans le même sens.

1. • Calculer l'énergie cinétique du système Terre-Lune dans le référentiel “fixe” d'origine O.

2. • Calculer le moment cinétique en O du système Terre-Lune dans le référentiel “fixe” d'origine O.

XII. Tourniquet de Mach-Feynman

• On considère un tourniquet dont le tube coudé mobile, horizontal, de section s, peut tourner autour de l'axe vertical (Oz).



◊ remarque : pour mieux mettre en évidence les aspects importants du raisonnement, on peut calculer plus simplement le moment cinétique en négligeant le diamètre du tube en comparaison de sa longueur.

1. • Le tourniquet, placé dans l'air, est alimenté en eau par une entrée E située sur un tube vertical selon (Oz), muni d'un raccord rotatif étanche. L'eau est éjectée par chacune des deux extrémités symétriques S_1 et S_2 avec un débit D.

◊ remarque : un tel dispositif devrait être étudié à l'aide de la mécanique des fluides ; on suppose que les raisonnements utilisés ici donnent une bonne approximation.

a) En négligeant tous les frottements, établir un bilan de moment cinétique et en déduire l'équation du mouvement du tourniquet.

b) Bien que l'eau soit en mouvement dans le tube, justifier qu'on peut décrire la rotation du dispositif à l'aide d'un moment d'inertie.

c) Résoudre l'équation et commenter le mouvement.

d) Le raisonnement utilisé semble considérer le mouvement du tourniquet comme causé par le liquide éjecté ; c'est seulement parce que le bilan est plus facile ainsi. Préciser les causes de ce mouvement.

2. a) Le tourniquet est maintenant placé dans l'eau. Discuter dans quelle mesure le raisonnement précédent peut encore s'appliquer.

b) Ajouter un effet de frottement fluide visqueux et commenter.

3. a) Le tourniquet placé dans l'eau est maintenant utilisé en mode d'admission. Exprimer l'équation obtenue en appliquant le raisonnement précédent, sans frottement, en changeant simplement le sens de la vitesse relative d'éjection. Commenter le mouvement en résultant.

b) Ajouter un effet de frottement fluide visqueux et commenter.

c) Expérimentalement, dans la plupart des cas, un tel dispositif en mode d'admission reste immobile s'il l'est initialement (des vidéos se trouvent sur internet : rechercher “sprinkler”). En outre, si on essaye de le lancer manuellement, il s'arrête assez rapidement (à cause des frottements). Proposer une modification du modèle permettant de décrire cela.

d) Le raisonnement utilisé est basé sur un bilan car il est plus facile ainsi. Préciser les interactions locales qui pourraient a priori causer un mouvement.

e) Quelques dispositifs montrent un comportement expérimental différent : le mouvement inverse en mode d'admission existe et est analogue, mais la vitesse limite est nettement plus faible. Proposer une interprétation.

XIII. Théorème du viriel et masse non visible

• On souhaite appliquer le théorème du viriel à un amas sphérique de N galaxies, de rayon R, de masse totale M.

• La vitesse quadratique moyenne peut être estimée d'après l'effet Doppler observé pour la lumière reçue. L'observation lumineuse fournit aussi une estimation du rayon.

• Montrer que le théorème du viriel donne une relation permettant de calculer la masse : $\langle v^2 \rangle \approx \dfrac{\mathcal{G}M}{2R}$.