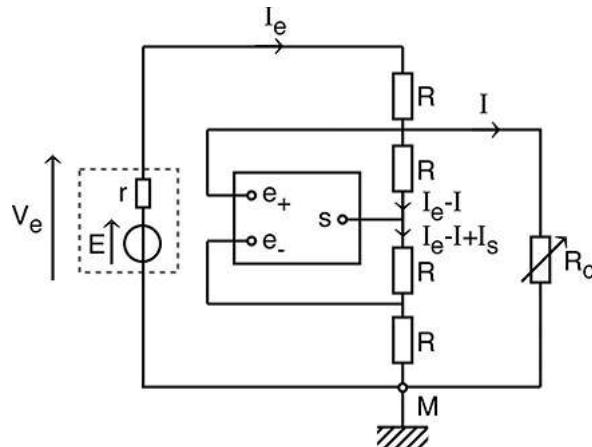


AO “IDÉAL” EN MODE LINÉAIRE - corrigé du TP3

2. Montage “générateur de courant”

2.1. Étude de base

- On se limite ici au cas (idéal) où on dispose de quatre résistances R rigoureusement égales.



$$\begin{aligned} V_e &= R I_e + \varepsilon + R . (I_e - I + I_s) \approx R . (2 I_e - I + I_s) ; \\ \varepsilon &= R . (I_e - I) + R . (I_e - I + I_s) \approx 0 ; \text{ donc } 2 I_e + I_s \approx 2 I ; \text{ ainsi } V_e \approx R I . \end{aligned}$$

- En attente de données fournies par les étudiants...

2.2. Limite supérieure de R_c

- En se limitant encore au cas (idéal) où on dispose de quatre résistances R rigoureusement égales :

$$V_s = 2 R . (I_e - I + I_s) = 2 V_- \approx 2 V_+ ; \text{ donc } V_s = R I_s .$$

Pour éviter la saturation, il faut que $V_s < A$ (tension d'alimentation) ; mais, quand le courant débité par la sortie n'est pas négligeable, il faut de plus que $V_s < A - \rho I_s$ (contrainte plus forte) où $\rho \approx 300 \Omega$ est la résistance de sortie en mode saturé.

Ceci impose :

$$\begin{aligned} V_s &= R I_s < A - \rho I_s ; \text{ donc } I_s < \frac{A}{R+\rho} ; \text{ ainsi } V_s = R I_s < A \frac{R}{R+\rho} ; \\ V_+ &\approx V_- = \frac{V_s}{2} < \frac{A R}{2(R+\rho)} ; \\ V_+ &\approx R_c I = R_c \frac{V_e}{R} ; \text{ donc } R_c < \frac{A R^2}{2 V_e (R+\rho)} . \end{aligned}$$

Par exemple :

- ◊ pour $R = 10 \text{ k}\Omega \gg \rho$; $A = 15 \text{ V}$; $V_e = 7,5 \text{ V} \ll A$; on obtient : $R_c < 9700 \Omega \approx R$;
- ◊ pour $R = 1 \text{ k}\Omega$; $A = 15 \text{ V}$; $V_e = 12 \text{ V}$; on obtient : $R_c < 480 \Omega \ll R$.

2.3. Limite inférieure de R et/ou R_c

- Un autre problème se pose si on impose V_e (qui sert à régler le courant I) à l'aide d'un générateur de tension de résistance non nulle (généralement : un GBF). Dans ce cas, la variation de R_c provoque une variation de I_e qui provoque une variation de $V_e = E - r I_e$, ce qui provoque une variation de I .

Pour éviter cela, supposons qu'on veuille limiter les variations de V_e à un proportion α (par exemple 1 %) ; alors il faut imposer $I_e < \frac{\alpha V_e}{r}$.

Puisque $I_e = \frac{V_e - R_c I}{R}$ avec $I = \frac{V_e}{R}$ ceci donne : $R_c > R \cdot \left(1 - \frac{\alpha R}{r}\right)$.

- Si on veut éviter qu'il y ait une limite inférieure sur R_c (ce qui est quasi-indispensable pour un générateur de courant), il faut que la limite théorique soit négative ou nulle, donc $R > \frac{r}{\alpha}$.

Par exemple, pour $r = 50 \Omega$ et $\alpha = 1\%$ on doit utiliser $R > 5 \text{ k}\Omega$.

2.4. Incertitude sur le courant généré

- La propagation des incertitudes lors de l'estimation de l'expression théorique $I_e = \frac{V_e}{R}$ doit se faire en tenant compte du fait que les résistances ne sont pas rigoureusement égales : $R_1 \neq R_2 \neq R_3 \neq R_4$.

Dans le cas général (en régime non saturé) on peut écrire :

$$V_+ = \frac{\frac{V_e + V_s}{R_1 + R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_c}} ; V_- = \frac{\frac{V_s}{R_3}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} ;$$

$$V_+ = V_- \text{ permet d'éliminer } V_s ; I = \frac{V_+}{R_c} = \frac{V_e R_2 R_4}{R_1 R_2 R_4 - R_c(R_1 R_3 - R_2 R_4)} .$$

Ceci montre en particulier qu'on n'obtient un montage générateur de courant (dont le courant débité ne dépend pas de R_c) que si on choisit des résistances telles que $R_1 R_3 = R_2 R_4$ (et en particulier si ces résistances sont égales).

- Étant donné qu'on utilise les mêmes instruments pour les différentes mesures, on choisit ici d'ajouter les incertitudes linéairement pour tenir compte d'éventuelles corrélations.

Ainsi : $\Delta I = \left| \frac{\partial I}{\partial V_e} \right| \Delta V_e + \left| \frac{\partial I}{\partial R_1} \right| \Delta R_1 + \left| \frac{\partial I}{\partial R_2} \right| \Delta R_2 + \left| \frac{\partial I}{\partial R_3} \right| \Delta R_3 + \left| \frac{\partial I}{\partial R_4} \right| \Delta R_4 + \left| \frac{\partial I}{\partial R_c} \right| \Delta R_c$; expression dans laquelle on substitue ensuite : $R = R_1 \approx R_2 \approx R_3 \approx R_4$ et $\Delta R = \Delta R_1 = \Delta R_2 = \Delta R_3 = \Delta R_4$.

On obtient respectivement :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial I}{\partial V_e} \right| &= \left| \frac{R_2 R_4}{R_1 R_2 R_4 - R_c(R_1 R_3 - R_2 R_4)} \right| \approx \frac{1}{R} ; \\ \left| \frac{\partial I}{\partial R_1} \right| &= \left| \frac{V_e R_2 R_4 \cdot (R_2 R_4 - R_c R_3)}{(R_1 R_2 R_4 - R_c(R_1 R_3 - R_2 R_4))^2} \right| \approx \frac{|V_e| \cdot (R - R_c)}{R^3} ; \\ \left| \frac{\partial I}{\partial R_2} \right| &= \left| \frac{-V_e R_1 R_3 R_4 R_c}{(R_1 R_2 R_4 - R_c(R_1 R_3 - R_2 R_4))^2} \right| \approx \frac{|V_e| R_c}{R^3} ; \\ \left| \frac{\partial I}{\partial R_3} \right| &= \left| \frac{V_e R_1 R_2 R_4 R_c}{(R_1 R_2 R_4 - R_c(R_1 R_3 - R_2 R_4))^2} \right| \approx \frac{|V_e| R_c}{R^3} ; \\ \left| \frac{\partial I}{\partial R_4} \right| &= \left| \frac{-V_e R_1 R_2 R_3 R_c}{(R_1 R_2 R_4 - R_c(R_1 R_3 - R_2 R_4))^2} \right| \approx \frac{|V_e| R_c}{R^3} ; \\ \left| \frac{\partial I}{\partial R_c} \right| &= \left| \frac{V_e R_2 R_4 \cdot (R_1 R_3 - R_2 R_4)}{(R_1 R_2 R_4 - R_c(R_1 R_3 - R_2 R_4))^2} \right| \approx 0 \text{ (conforme au fait que } I \text{ ne dépend pas de } R_c \text{).} \end{aligned}$$

- Ceci donne donc au total : $\Delta I = \frac{1}{R} \Delta V_e + \frac{|V_e|}{R^3} (|R - R_c| + 3 R_c) \Delta R$ qui diffère du résultat obtenu en dérivant l'expression simplifiée : $\Delta I \approx \frac{1}{R} \Delta V_e + \frac{|V_e|}{R^2} \Delta R$; cette approximation revient à substituer $R_c = 0$ (logique puisque I n'en dépend pas) dans l'incertitude complète, mais elle néglige l'effet des incertitudes sur les différences des quatre résistances.

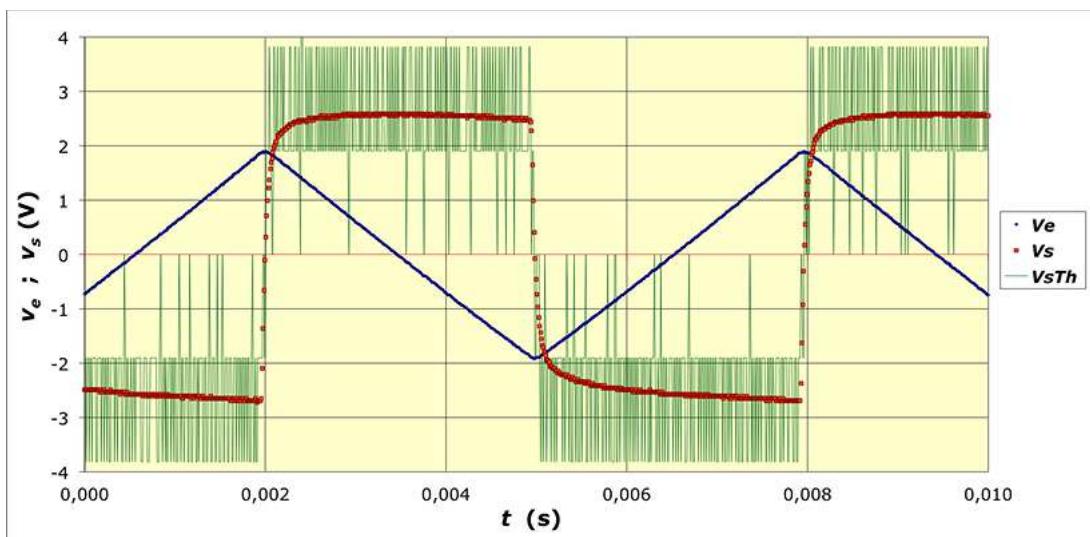
Plus précisément :

- ◊ pour $R_c > R$ cela augmenterait l'effet de ΔR d'un facteur $\frac{4R_c}{R} - 1 \geq 3$ très gênant, mais la partie (2.2) montre que ce cas est interdit car il correspond à un régime saturé ;
- ◊ pour $R_c < R$ cela augmente l'effet de ΔR d'un facteur $1 + \frac{2R_c}{R} \leq 3$ qui peut ne pas être négligeable pour les plus grandes valeurs de R_c .

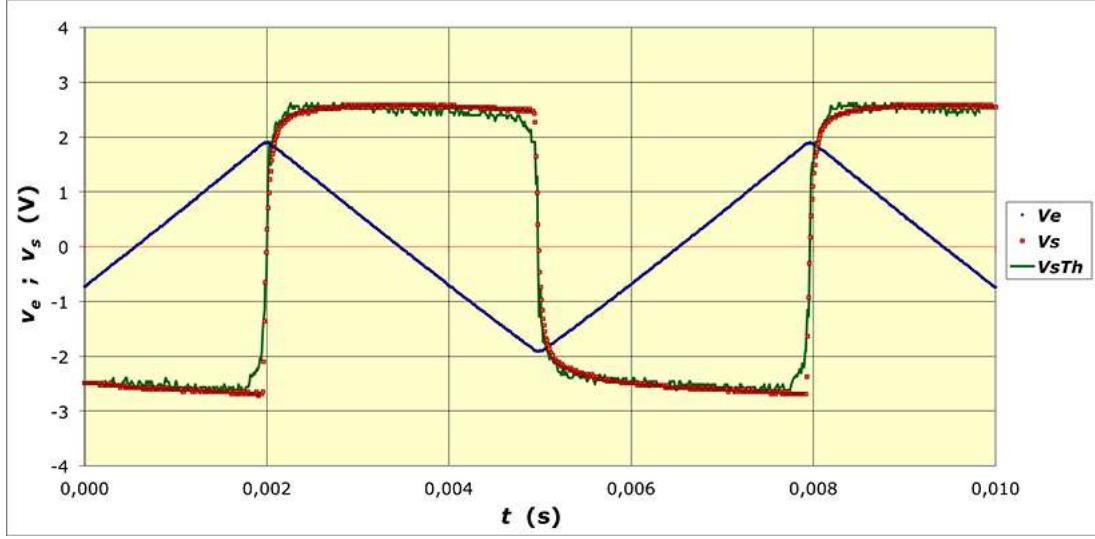
3. Montage “dérivateur”

- On peut raisonner avec le courant dans la branche RC et $v_- = v_+ = 0$. La charge du condensateur est : $q = C v_e$ et le courant est $i = -\frac{v_s}{R} = \frac{dq}{dt}$. Ainsi $v_s = -R C \frac{dv_e}{dt}$.
- On réalise le montage avec $R = 2000 \pm 12 \Omega$; $C = 0,955 \pm 0,014 \mu\text{F}$; signaux triangulaires de fréquence $N = 163,72 \pm 0,84 \text{ Hz}$.

Pour calculer la dérivée expérimentale, on peut considérer $\dot{v}(t_n) \approx \frac{v(t_{n+1}) - v(t_{n-1})}{t_{n+1} - t_{n-1}}$; cela révèle la présence de petits parasites de haute fréquence dont la dérivée est grande (cette difficulté, liée aux incertitudes de mesure, est analogue à l'effet des parasites radio indiqué par le protocole du TP).



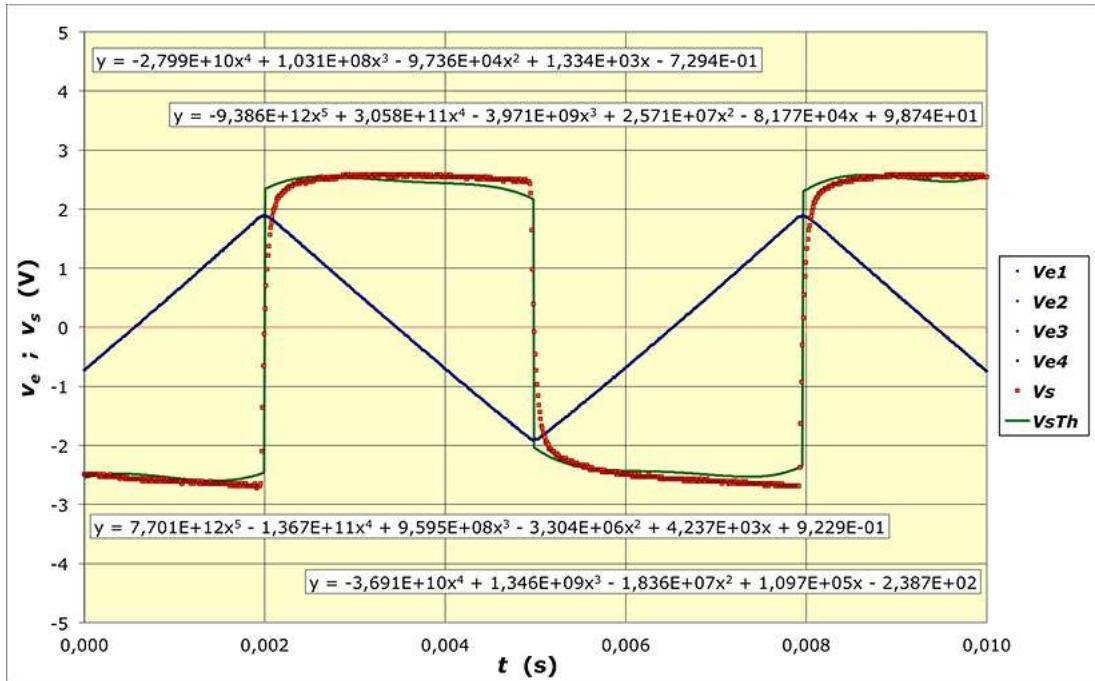
- Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour compenser ce défaut. Un filtrage trop simple des variations rapides est délicat pour cette forme de signal : en calculant une “dérivée moyenne” sur un intervalle plus grand, on déforme les portions de courbe où la variation est réellement rapide (début et fin de créneaux). Il faut alors régler “à la main” les largeurs d’intervalles en fonction des variations : ce n'est en pratique possible que pour un signal assez simple.



On constate que le circuit déivateur n'est pas parfait (on remarque un "retard aux variations rapides" au début de chaque créneau) mais qu'il est dans l'ensemble tout à fait efficace.

◊ remarque : le "défaut" signalé du montage a aussi pour effet d'ajouter en sortie un petite contribution proportionnelle (de signe contraire) à l'entrée ; ainsi une pente supérieure (algébriquement) de v_s pour le créneau haut et inférieure pour le créneau bas.

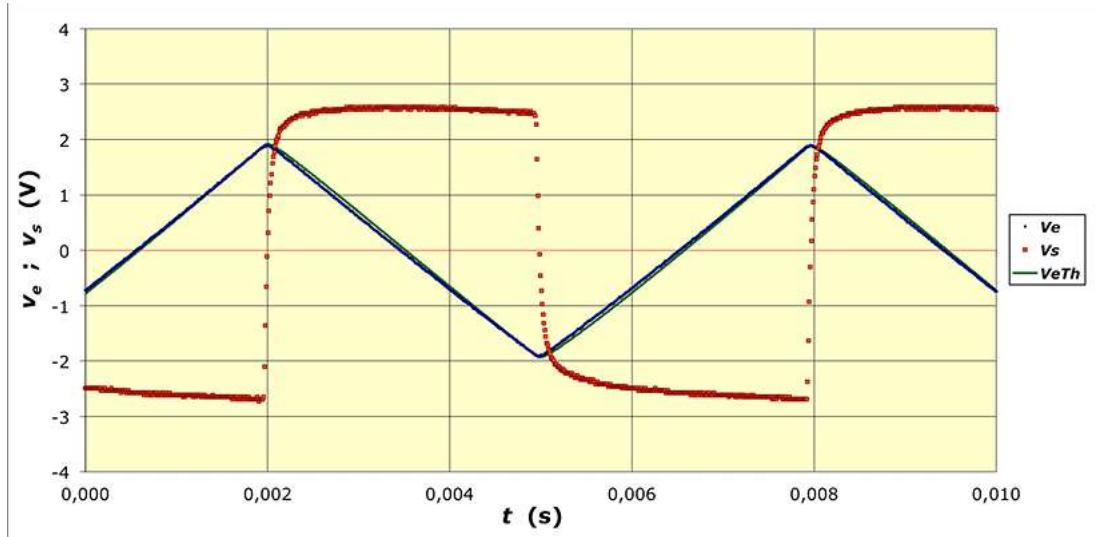
- Une autre méthode, adaptée à ce cas particulier, peut consister à ajuster sur les dents de scie v_e une série de segments de droites, ou mieux : des développements limités polynomiaux. La dérivée théorique des polynômes ajustés est alors simple ; le résultat est comparable, mais la méthode ne peut ici encore s'appliquer qu'à un signal simple.



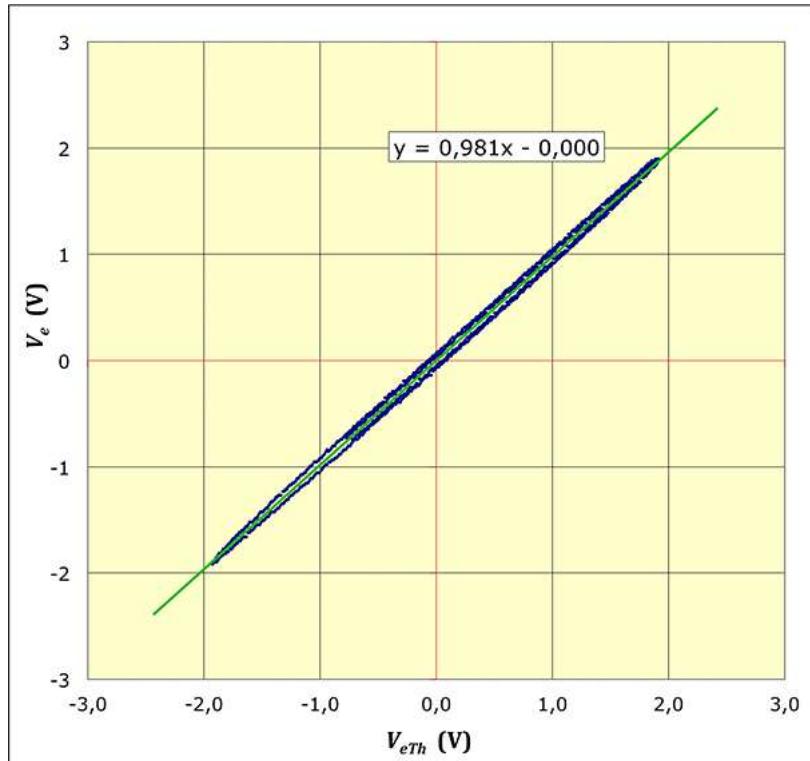
- Une autre méthode encore peut inversement consister à intégrer v_s pour retrouver v_e . On utilise pour cela l'approximation : $\int v_s(t) dt \approx \sum [v_s(t_n) (t_{n+1} - t_n)]$.

On retrouve alors l'inconvénient associé au montage intégrateur : le moindre décalage continu (associé aux incertitudes de mesure) est intégré et "incline" le graphique d'une pente correspondante. Cela peut être compensé en ajustant "à la main" la (très faible) constante qu'il faut ajouter au signal pour éliminer l'inclinaison. Le décalage ainsi ajusté est ici $\approx 1,5$ mV pour des signaux d'amplitude ≈ 2 V .

La modélisation semble ainsi satisfaisante ; on y remarque d'une autre façon que précédemment le "retard aux variations rapides" au début de chaque créneau.

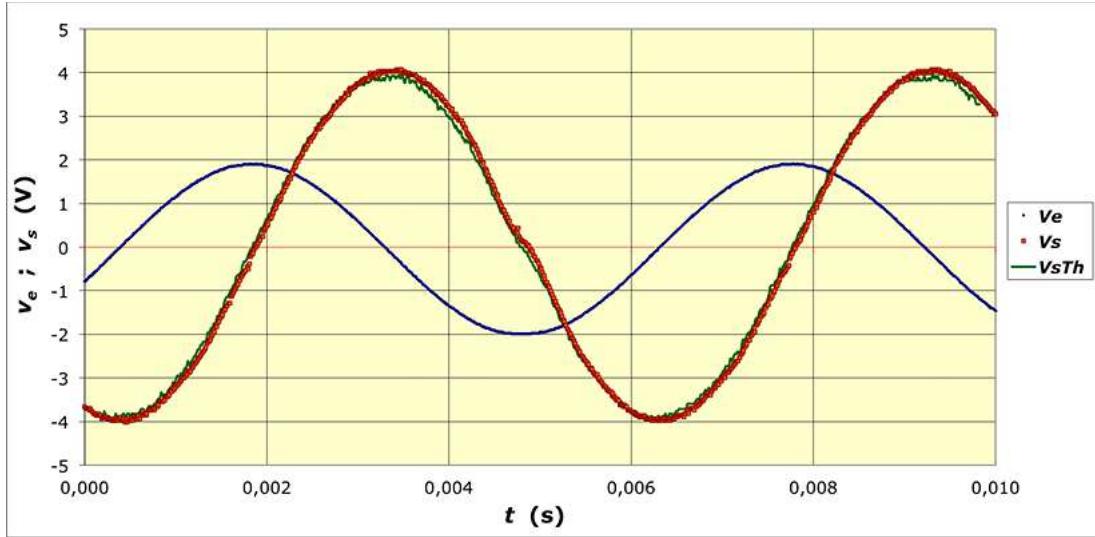


L'autre mode de présentation suivant est possible ; on y retrouve le "retard" (décalage entre "aller" et "retour") et l'écart du modèle est inférieur à 2 % .

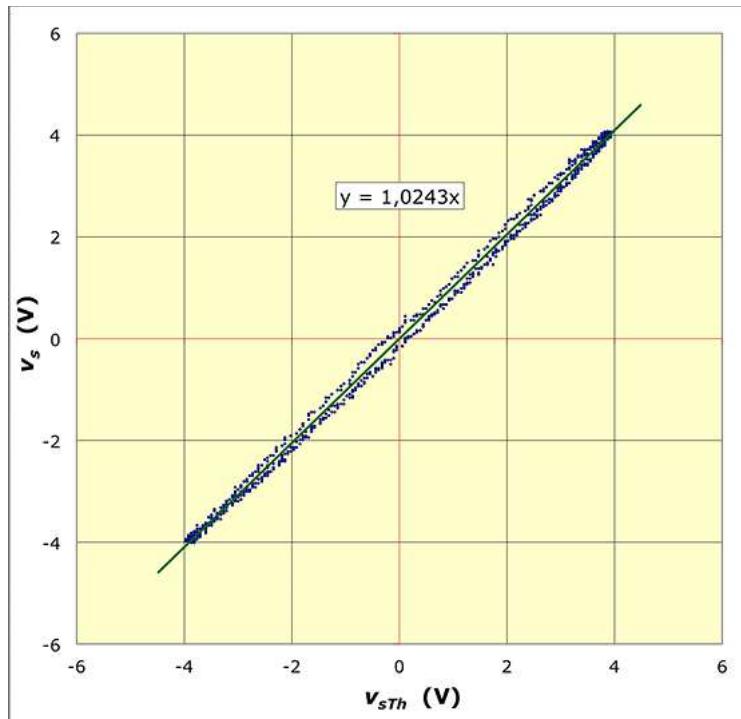


- Le même montage a aussi été testé en signaux sinusoïdaux. Avec la première des méthodes précédentes (et un filtrage simple) on peut conclure à une représentation relativement satisfaisante de la modélisation.

On observe toutefois comme précédemment un léger retard, ainsi qu'une légère oscillation de v_s à chaque extrémum de v_e , caractéristiques du "défaut" déjà commenté.



L'autre présentation montre un écart du modèle de l'ordre de 2 % .



Dans ce cas on pourrait aussi ajuster des sinusoïdes, puis comparer les amplitudes et les déphasages... le mieux est d'utiliser une méthode efficacement adaptée au cas particulier de signal étudié.

4. Montage “intégrateur”

4.1. Montage de base

- On peut raisonner avec le courant dans la branche RC et $v_- = v_+ = 0$. La charge du condensateur est : $q = -C v_s$ et le courant est $i = \frac{v_e}{R} = \frac{dq}{dt}$. Ainsi $v_e = -R C \frac{dv_s}{dt}$ ou inversement $v_s = -\frac{1}{R C} \int v_e dt$.
- En attente de données fournies par les étudiants...

4.2. “Défaut” utile du montage

- Exploitant les analogies associées aux transformations de Laplace et de Fourier, on peut raisonner avec les impédances complexes : $\underline{i} = \frac{\underline{v}_e}{R} = -\frac{\underline{v}_s}{Z}$ avec $\frac{1}{Z} = jC\omega + \frac{1}{R'}$.

Pour les variations raisonnablesment rapides (sur des durées caractéristiques plus petites que $\tau \approx R'C$) on obtient $\frac{1}{Z} \approx jC\omega$ caractérisant l'intégration, donc on retrouve le résultat précédent.

Pour les basses fréquences (variations lentes) $\frac{1}{Z} \approx \frac{1}{R'}$ et $v_s \approx -\frac{R'}{R} v_e$; en particulier un très petit décalage continu de v_e est multiplié et ajouté en sortie, mais ce n'est pas trop perturbateur pourvu que $\frac{R'}{R}$ ne soit pas trop grand.

◊ remarque : une autre façon de décrire cet effet consiste à dire que le signal perturbateur n'est intégré que pendant une durée $\approx \tau$, donc la perturbation est : $\delta v_s \approx -\frac{1}{R'C} \delta v_e \tau \approx -\frac{R'}{R} \delta v_e$.

- Le protocole du TP suggère $\frac{R'}{R} \approx 250$; si v_s est du même ordre de grandeur que v_e (quelques volts) alors des perturbations de l'ordre du millivolt peuvent décaler v_s jusqu'à 25 %... mais sans diverger en saturation (ce qui est l'effet principal souhaité).

Le protocole suggère par ailleurs $T = \frac{1}{N} \ll \tau \approx 25 \text{ ms}$; ceci assure que l'intégration s'effectue sans être filtrée sur la durée de la période étudiée.

◊ remarque : expérimentalement, le mieux est d'adopter un compromis en faisant quelques essais.

- En attente de données fournies par les étudiants...