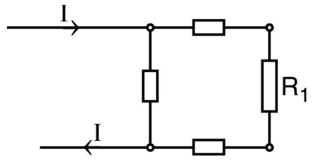
ÉLECTROCINÉTIQUE - ASSOCIATION DE DIPÔLES - corrigé des exercices

A. EXERCICES DE BASE

I. Association de résistances

1.a. • La résistance de la branche de droite est $3r$, donc l'assemblage des deux branches en parallèle a une résistance R_1 telle que : $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{3\,r} = \frac{4}{3\,r}$ c'est-à-dire : $R_1 = \frac{3}{4} r$.

1.b. • La maille de droite du second montage est identique au premier montage, sa résistance est donc R_1.
• Le second montage est donc équivalent au suivant, dont la branche de droite a pour résistance $2\,r + R_1 = \frac{11}{4} r$.



• L'ensemble a donc une résistance R_2 telle que : $\frac{1}{R_2} = \frac{1}{r} + \frac{4}{11\,r} = \frac{15}{11\,r}$ c'est-à-dire : $R_2 = \frac{11}{15} r$.

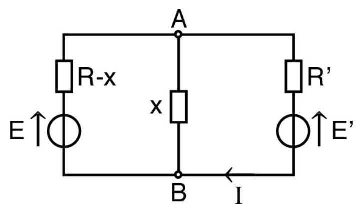
2.a. • Pour $n+1$ branches en parallèle, la résistance de l'ensemble des n branches à droite est $2\,r + R_n$ donc l'assemblage des $n+1$ branches a une résistance R_{n+1} telle que : $\frac{1}{R_{n+1}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2\,r+R_n}$ c'est-à-dire : $R_{n+1} = \frac{2\,r+R_n}{3\,r+R_n}\, r$.
• Si la limite R pour $n \to \infty$ existe, elle est telle que : $R = \frac{2\,r+R}{3\,r+R}\, r$ c'est-à-dire : $R^2 + 2\,r\,R - 2\,r^2 = 0$ d'où on déduit : $R = \left(\sqrt{3} - 1\right) r \approx 0{,}73205\, r$.

2.b. • On constate que $R_1 = 0{,}75\, r$; $R_2 \approx 0{,}733\, r$; $R_3 \approx 0{,}73205\, r$; ce qui montre que la suite est très rapidement convergente.

II. Électrolyseur

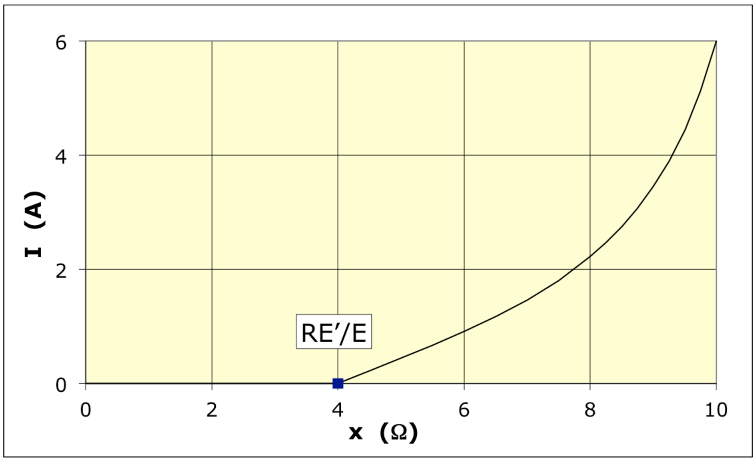
1. • L'énoncé indique $E > 0$ donc le schéma du générateur correspond à la convention de signe “usuelle”. Puisque l'électrolyseur est un dipôle passif, le générateur impose dans les branches de droite un courant du haut vers le bas, ce qui correspond à $I \geq 0$.
◊ remarque : le courant peut être nul si la tension imposée entre ses bornes est insuffisante pour provoquer l'électrolyse.

2. • Avec les notations de Thévenin, on peut utiliser le schéma équivalent suivant (où on a aussi schématisé le montage du rhéostat) :



3. • La loi de Millmann donne ainsi (s'il y a électrolyse) : $U_{AB} = \frac{\frac{E}{R-x}+\frac{E'}{R'}}{\frac{1}{R-x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{R'}} = \frac{R'\,E+(R-x)\,E'}{R\,R'+(R-x)\,x}\; x$.
• Mais par ailleurs : $U_{AB} = E' + R'\,I$, donc (tant que cette relation correspond à une valeur positive) :
$I = \frac{U_{AB}-E'}{R'} = \frac{x\,E - R\,E'}{R\,R'+(R-x)\,x}$.

• La relation précédente est valable pour $x \geq x_0 = \frac{R\,E'}{E} = 4\ \Omega$; pour $0 < x < x_0$ on obtient $I = 0$.
• On obtient finalement le graphique suivant :



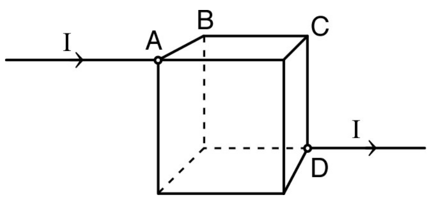
III. Générateurs en opposition

1. • Puisque l'interrupteur est ouvert : $I = I_2 = \frac{E_2}{R+r_2} = 0{,}60\ \mathrm{A}$ (loi de Pouillet).
◊ remarque : on a alors $I_1 = 0$ et la tension aux bornes de l'interrupteur prend automatiquement la valeur : $U = E_2 - r_2\,I - E_1 = R\,I - E_1 = \left(\frac{R}{R+r_2} - \alpha\right)\,E_2 = \pm\,6{,}0\ \mathrm{V}$ (selon α).

2. • Quand l'interrupteur est fermé, on peut par exemple utiliser la loi de Millmann pour calculer la tension aux bornes de R : $R\,I = \frac{\frac{E_1}{r_1}+\frac{E_2}{r_2}}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{R}+\frac{1}{r_2}}$ et donc $I = \frac{E_1\,r_2 + E_2\,r_1}{R.(r_1+r_2)+r_1\,r_2}$. On obtient ainsi : $I' = 0{,}596\ \mathrm{A} \approx 0{,}60\ \mathrm{A}$ et $I'' = 0{,}601\ \mathrm{A} \approx 0{,}60\ \mathrm{A}$ (compte tenu de la précision des données).
• On peut ensuite calculer I_2 par la loi des mailles : $I_2 = \frac{E_2 - R\,I}{r_2} = \frac{E_2.(R+r_1) - E_1\,R}{R.(r_1+r_2)+r_1\,r_2}$. On obtient ainsi : $I_2' = 1{,}78\ \mathrm{A}$ et $I_2'' = -0{,}59\ \mathrm{A}$.
• On constate donc que :
  ◊ du point de vue du courant dans R, la f.e.m. E_1 importe peu car $r_2 \ll r_1$ et l'effet de E_2 reste prépondérant (c'est lui qui impose la tension aux bornes de R) ;
  ◊ du point de vue du courant imposé dans le générateur (2), c'est au contraire la comparaison des effets de E_1 et E_2 qui importe, par l'intermédiaire de la quantité : $E_2.(R + r_1) - E_1\,R$.

B. EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

IV. Association de résistances



• La "symétrie" par rotation d'un tiers de tour autour de AD montre que les courants dans les trois arêtes issues de A sont égaux ; or leur somme est I (loi des nœuds en A), donc ces courants sont égaux à $\frac{I}{3}$. Il en est de même pour les courants dans les trois arêtes issues de D.

• La symétrie par rapport au plan passant par A, D et B montre que les courants dans les deux arêtes issues de B, autres que AB, sont égaux ; or leur somme est $\frac{I}{3}$ (loi des nœuds en B), donc ces courants sont égaux à $\frac{I}{6}$. La symétrie par rotation utilisée précédemment montre alors que les courants dans les six arêtes "intermédiaires" correspondantes sont de même égaux à $\frac{I}{6}$.

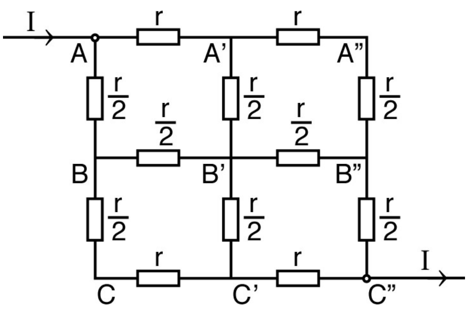
• La loi d'Ohm et la loi des tensions donnent alors : $U_{AD} = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} = r\ \frac{I}{3} + r\ \frac{I}{6} + r\ \frac{I}{3} = \frac{5}{6}\ r\ I$.
La résistance équivalente de l'ensemble est R telle que : $U_{AD} = R\ I$ c'est-à-dire : $R = \frac{5}{6}\ r$.

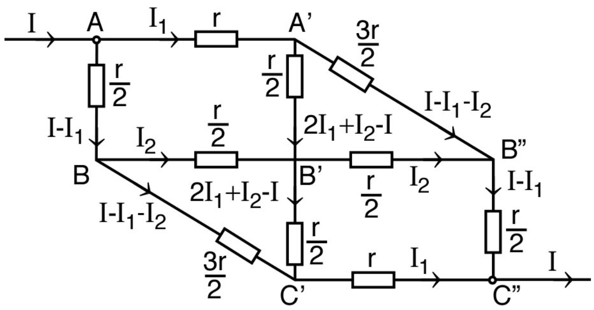
V. Association de résistances

1. • Les couples de points symétriques (B, D), (B', D') et (B'', D'') sont reliés de façon symétrique, donc le réseau est globalement symétrique par rapport au plan considéré.

2. • Les points symétriques considérés sont aux mêmes potentiels ; on peut les court-circuiter sans modifier la répartition des courants.

3. • En “aplatissant” le réseau “diagonalement” (D, D' et D'' sont respectivement confondus avec B, B' et B'') et, en remplaçant chaque paire de résistances r en parallèle par une résistance $\frac{r}{2}$, on obtient le réseau équivalent suivant, qui peut encore se simplifier par des associations en série :





4. • Dans un tel réseau, on peut continuer à simplifier par des équivalences triangle-étoile (triangles $A'B'B''$ et $BB'C'$) ; mais, compte tenu de la symétrie centrale et en utilisant la loi des nœuds, on peut limiter le nombre de courants inconnus à deux (nombre de mailles indépendantes).
• En écrivant la loi des mailles, par exemple pour les deux mailles de gauche, on obtient :
$$r\ I_1 + \frac{r}{2}\ (2\ I_1 + I_2 - I) - \frac{r}{2}\ I_2 - \frac{r}{2}\ (I - I_1) = 0 \quad ; \quad \frac{r}{2}\ I_2 + \frac{r}{2}\ (2\ I_1 + I_2 - I) - \frac{3\ r}{2}\ (I - I_1 - I_2) = 0 \ .$$
• De la première équation, on déduit : $I_1 = \frac{2}{5} I$; en reportant dans la seconde, on obtient : $I_2 = \frac{2}{5} I$.
• Ainsi : $U_{AB} = r\ I_1 + \frac{3\ r}{2}\ (I - I_1 - I_2) + \frac{r}{2}\ (I - I_1) = r\ I$, d'où la résistance équivalente : $R = r$.

VI. Ligne souterraine et résistance itérative

1. • L'assemblage de r_2 et $R + r_1$ en parallèle équivaut à : $r' = \frac{(R+r_1)\ r_2}{R+r_1+r_2}$. L'ensemble a donc une résistance de valeur R si et seulement si : $R = r_1 + r'$ c'est-à-dire : $(R - r_1)(R + r_1 + r_2) = (R + r_1)\ r_2$ d'où on déduit : $R = \sqrt{(r_1 + 2\ r_2)\ r_1}$.

2. • Dans les conditions précédentes : $U_0 = R\ I_0$ et $U_1 = R\ I_1$.
• D'après la loi des mailles : $U_0 = r_1\ I_0 + r_1\ I_1 + U_1$ donc (en divisant par I_0) : $R = r_1.(1 + \alpha) + R\ \alpha$ et par conséquent : $r_1 = R\ \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \approx 820\ \Omega$.
• Compte tenu de la relation initiale : $r_2 = \frac{R^2 - r_1^2}{2\ r_1} = \frac{2\ \alpha\ R}{1-\alpha^2} \approx 200\ \Omega$.

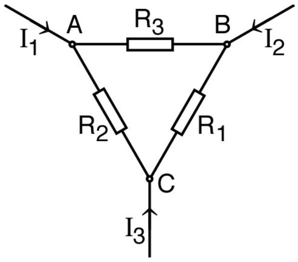
3. • D'après ce qui précède, avec n cellules on obtient : $\alpha = \frac{U_1}{U_0} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} \cdots$ et par suite : $\frac{U_n}{U_0} = \alpha^n$.

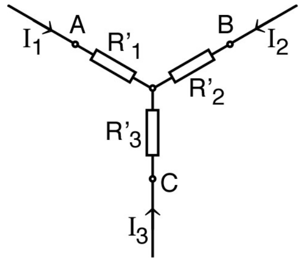
4. • Par comparaison avec ce qui précède, en remplaçant $r_1 \leftarrow \frac{\rho}{2} dx$ et $r_2 \leftarrow \frac{1}{k\ dx}$ (d'où $r_2 \gg r_1$ puisque dx est infinitésimal), la condition est : $R^2 = \frac{\rho\ dx}{k\ dx}$ et donc $R = \sqrt{\frac{\rho}{k}} = 410\ \Omega$.

5. • En posant : $\alpha = \frac{U(x+dx)}{U(x)}$, on obtient : $dU = U(x+dx) - U(x) = (\alpha - 1)\, U(x)$.
• En inversant l'expression de r_1 , on obtient par ailleurs : $\alpha = \frac{R-r_1}{R+r_1}$; en remplaçant $r_1 \leftarrow \frac{\rho}{2} dx$ on obtient donc : $\alpha \approx 1 - \frac{\rho}{R} dx$ (en limitant au premier ordre puisque dx est infinitésimal).
• Ceci donne : $\frac{dU}{U} = \alpha - 1 = -\frac{\rho}{R} dx = -\sqrt{\rho\, k}\, dx$ et donc : $U(x) = U(0)\ \mathrm{e}^{-\sqrt{\rho\, k}\, x}$. Finalement, on aboutit donc à : $\beta = \frac{U(L)}{U(0)} = \mathrm{e}^{-\sqrt{\rho\, k}\, L} = 0{,}988$.

VII. Équivalence triangle-étoile

1.a. • Compte tenu de la loi des nœuds, il suffit de deux des courant pour décrire le système, par exemple I_1 et I_2 ; on en déduit alors : $I_3 = -I_1 - I_2$.





1.b. • D'après la loi des mailles, il suffit de deux des tensions pour décrire le système, par exemple U_{AB} et U_{BC} ; on en déduit alors : $U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$.

1.c. • Pour caractériser le tripôle, il est nécessaire et suffisant de savoir calculer les courants qui circulent quand on impose des tensions données, c'est à dire de connaître deux relations donnant deux courants en fonction de deux tensions (ou réciproquement).

2.a. • Le montage en triangle peut être décrit par les relations :
$$I_1 = G_3\, U_{AB} + G_2\, U_{AC} = (G_2 + G_3)\, U_{AB} + G_2\, U_{BC}\ ;\ I_2 = -G_3\, U_{AB} + G_1\, U_{BC} .$$

2.b. • L'inversion donne :
$$U_{AB} = \frac{G_1\, I_1 - G_2\, I_2}{G_1\, G_2 + G_2\, G_3 + G_3\, G_1}\ ;\ U_{BC} = \frac{G_3\, I_1 + (G_2+G_3)\, I_2}{G_1\, G_2 + G_2\, G_3 + G_3\, G_1}\ ;$$
$$U_{AB} = \frac{R_2\, R_3\, I_1 - R_1\, R_3\, I_2}{R_1 + R_2 + R_3}\ ;\ U_{BC} = \frac{R_2\, R_3\, I_1 + R_1 . (R_2 + R_3)\, I_2}{R_1 + R_2 + R_3} .$$

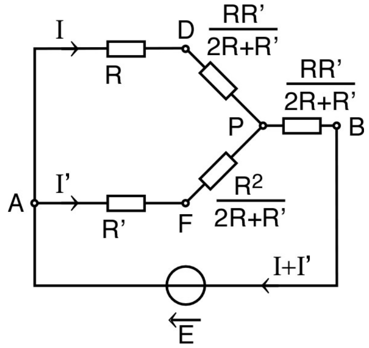
2.c. • Le montage en étoile peut être décrit par les relations :
$$U_{AB} = R'_1\, I_1 - R'_2\, I_2\ ;\ U_{BC} = R'_2\, I_2 - R'_3\, I_3 = R'_3\, I_1 + (R'_2 + R'_3)\, I_2 .$$

2.d. • Par comparaison : $R'_1 = \frac{R_2\, R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$ et de même pour R'_2 et R'_3 par permutation des indices.

VIII. Équivalence triangle-étoile

1. • Le pont de Wheatstone considéré est électriquement symétrique par rapport au milieu de la branche DF car il comporte la même résistance R dans les branches AD et FB, ainsi que la même résistance R' dans les branches AF et DB.
• On en déduit que le même courant (noté I) circule dans les branches AD et FB, puis que le même courant (noté I') circule dans les branches AF et DB. La loi des nœuds donne les autres courants.
◊ remarque : la symétrie retourne les courants, mais retourne aussi le générateur puisqu'elle intervertit A et B, donc elle redonne bien le même sens du courant quand on remet le générateur dans le sens initial.

2. • L'équivalence triangle-étoile donne le schéma ci-contre.



3.a. • La loi de Millmann donne alors : $U_{AP} = \frac{2E.(R'+R)^2}{(R'+2\,R)(3\,R'+R)}$.

3.b. • On en déduit :

$$I = \frac{U_{AP}}{2\,R}\ \frac{R'+2\,R}{R'+R} = \frac{E}{R}\ \frac{R'+R}{3\,R'+R}\ ;\ I' = U_{AP}\ \frac{R'+2\,R}{(R'+R)^2} = \frac{2\,E}{3\,R'+R}\ .$$

◊ remarque : ceci permet de connaitre $I - I'$, $I + I'$ puis toutes les tensions dans le circuit.