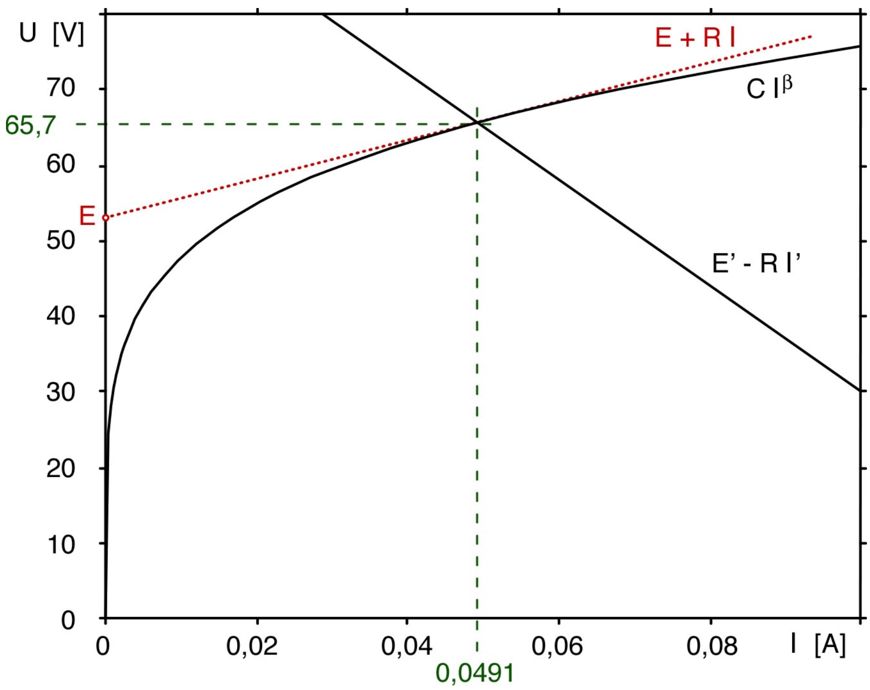
ÉLECTROCINÉTIQUE - LOIS GÉNÉRALES - corrigé des exercices

A. EXERCICES DE BASE

I. Caractéristique courant-tension

1. • La puissance dissipée dans le RDT est : $\mathcal{P} = U\,I = C\,I^{\beta+1}$ et la limite en courant est par conséquent : $I_M = \left(\frac{\mathcal{P}_M}{C}\right)^{\frac{1}{\beta+1}} = 59\ \text{mA}$.
   • Le graphique est le suivant :



2. • Avec : $U_0 = C\,I_0^{\beta}$, la caractéristique linéarisée peut s'écrire : $U = U_0 + (I - I_0)\frac{\partial U}{\partial I}$.
   • Ceci correspond à : $\frac{\partial U}{\partial I} = \beta\,C\,I^{\beta-1}$; $E = U_0 - I_0\,\frac{\partial U}{\partial I} = U_0\,.(1-\beta) = 52{,}7\ \text{V}$ (pour $I \approx I_0$) ; $R = \beta\,C\,I_0^{\beta-1} = 264\ \Omega$ (pour $I \approx I_0$).
   ◊ remarque : vu la forme de la courbe, on peut considérer que cette approximation affine est assez précise dans tout l'intervalle de 40 à $60\ \text{mA}$.

3.a. • Le courant de fonctionnement est solution de l'équation : $E' - R'\,I = C\,I^{\beta}$. Cette équation peut être résolue numériquement ; on obtient : $I = 49{,}1\ \text{mA}$ d'où on déduit : $U = 65{,}7\ \text{V}$.
◊ remarque : on peut vérifier que dans ce cas : $\mathcal{P} = U\,I = 3{,}22\ \text{W} < \mathcal{P}_M$.

3.b. • En utilisant la caractéristique linéarisée, le courant de fonctionnement vérifie : $E' - R'\,I = E + R\,I$ d'où on déduit de même : $I = \frac{E'-E}{R'+R} = 49{,}1\ \text{mA}$ (l'approximation est donc excellente).

II. Résistance interne et f.e.m. d'un générateur

• La tension aux bornes du générateur est : $U = E - r\,I$. Si on suppose que la résistance du voltmètre est très grande, le courant I du courant lors de la mesure est négligeable, donc : $E \approx U_1 = 240\ \text{V}$.
• Lors de la deuxième mesure : $U_2 = E - r\,I = R\,I$ donc : $I = \frac{U_2}{R} = \frac{E}{R+r}$ et $r = R\,\frac{E-U_2}{U_2} = 6\ \Omega$.

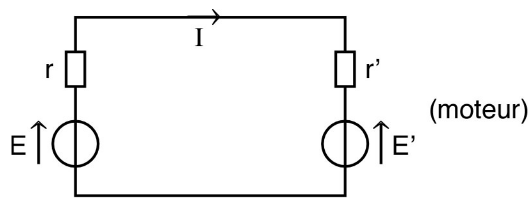
III. Force électromotrice d'un générateur

1. • Pour les générateurs en série dans le même sens, la loi des mailles s'écrit : $E_1 + E_2 - R\,I = 0$; pour les générateurs en série en opposition, la loi des mailles s'écrit : $E_1 - E_2 - R\,I' = 0$ (en prenant comme sens positif celui correspondant à E_1).
• On peut en déduire : $\frac{E_1+E_2}{E_1-E_2} = \frac{I}{I'}$; puis : $\frac{E_2}{E_1} = \frac{I-I'}{I+I'}$. On obtient ainsi : $E_2 = E_1 \frac{I-I'}{I+I'} = 1{,}068\ \mathrm{V}$ si on suppose que le courant I' est dans le sens positif (l'énoncé ne précise pas le sens de mesure) ; on obtient dans le cas contraire ($I' = -0{,}975\ \mathrm{mA}$) : $E_2 = E_1 \frac{I-I'}{I+I'} = 3{,}745\ \mathrm{V}$.

2. • Faute de connaitre les éventuelles corrélations entre I et I', l'incertitude sur $\alpha = \frac{E_2}{E_1}$ peut s'écrire : $\Delta\alpha \approx \left|\frac{\partial\alpha}{\partial I}\right| \Delta I + \left|\frac{\partial\alpha}{\partial I'}\right| \Delta I' = 2\frac{|I|+|I'|}{(I-I')^2}\,\Delta I$ (approximation pessimiste). Ceci correspond à une incertitude relative : $\frac{\Delta\alpha}{\alpha} \approx 2\frac{|I|+|I'|}{I^2-I'^2}\,\Delta I$.
• L'incertitude relative sur $E_2 = \alpha\,E_1$ peut s'écrire : $\frac{\Delta E_2}{E_2} \approx \frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta E_1}{E_1}$ (approximation pessimiste) ; mais aucune incertitude n'est indiquée pour E_1 . D'après la valeur numérique indiquée (nombre de décimales) pour E_1 , on peut supposer $\Delta E_1 \approx 0{,}005\ \mathrm{V}$ (il semble douteux de la négliger) ; ainsi : $\frac{\Delta E_1}{E_1} \approx 2{,}5.10^{-3}$; $\frac{\Delta\alpha}{\alpha} \approx 4{,}5.10^{-3}$; $\frac{\Delta E_2}{E_2} \approx 7.10^{-3}$.
• On obtient donc :
◊ dans le premier cas ($I' = 0{,}975\ \mathrm{mA}$) : $E_2 = 1{,}068 \pm 0{,}005\ \mathrm{V}$;
◊ dans le second cas ($I' = -0{,}975\ \mathrm{mA}$) : $E_2 = 3{,}745 \pm 0{,}017\ \mathrm{V}$.

IV. Puissance d'un moteur

1. • Le circuit peut être représenté par le schéma suivant, où E' est la f.c.e.m. du moteur et où la résistance totale du circuit est $R = r + r'$:



• La puissance mécanique que peut fournir le moteur est celle (électrique) que reçoit E' : $\mathcal{P}(I) = E'\,I$, mais E' dépend de la vitesse de rotation ω qui dépend de I de façon non évidente : $E' = E'\big(\omega(I)\big)$. Par contre, on peut écrire : $\mathcal{P}(I) = E\,I - R\,I^2$, expression entièrement définie à partir des données.
• La puissance maximale correspond au maximum de $\mathcal{P}(I)$ en fonction de I. La dérivée $\frac{d\mathcal{P}}{dI} = E - 2R\,I$ s'annule pour $I_1 = \frac{E}{2R} = 5\ \mathrm{A}$, donc la puissance maximum est $\mathcal{P}_M = \mathcal{P}(I_1) = \frac{E^2}{4R} = 250\ \mathrm{W}$.
◊ remarque : on peut vérifier que $\frac{d^2\mathcal{P}}{dI^2} = -2R < 0$; il s'agit donc bien d'un maximum.

2. • Le courant I correspondant à : $\mathcal{P}(I) = \frac{\mathcal{P}_M}{2}$ est solution de l'équation : $I^2 - \frac{E}{R}\,I + \frac{E^2}{8R^2} = 0$, ce qui donne : $I = \frac{E}{2R}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. La valeur inférieure correspond à une puissance mécanique inférieure à $\mathcal{P}_M$ pour cause d'insuffisance d'énergie fournie au moteur ; la valeur supérieure correspond à une puissance mécanique inférieure à $\mathcal{P}_M$ pour cause de pertes par effet Joule (si, à partir d'un régime donné, on freine mécaniquement le moteur, alors sa f.c.e.m. diminue et I augmente... si cela ne fait pas augmenter la puissance mécanique, c'est que ça fait augmenter l'effet Joule...). La condition "normale" d'utilisation correspond donc à : $I = \frac{E}{2R}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1{,}46\ \mathrm{A} < I_1$.

◊ remarque : le courant est : $I = \frac{E-E'}{R}$ (d'après la loi des mailles) ; or, d'après l'indication de l'énoncé, l'utilisation d'une puissance mécanique inférieure à $\mathcal{P}_M$ impose "normalement" E' supérieure à la valeur correspondant à $\mathcal{P}_M$, donc impose $I < I_1$.

B. EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

V. Résistance de fuite d'un câble coaxial

• Si les cylindres ont une résistance non négligeable, correspondant à $a\,dx$ pour une tranche de longueur dx, on peut modéliser une tranche de câble par une résistance $a\,dx$ "en série" (répartie en deux pour "l'aller" et le "retour"), associée à une résistance $\frac{b}{dx}$ "en parallèle".

• D'après le schéma, $\frac{b}{dx}$ représente la "résistance radiale" d'une tranche de câble de longueur dx, c'est-à-dire que $b = 17{,}5.10^9\ \Omega.\mathrm{m}$ représente la "résistance radiale" d'une "unité de longueur" de câble.

◊ remarque : du point de vue du courant radial, les tranches d'épaisseur dx s'ajoutent en parallèle ; par suite la "résistance radiale" est proportionnelle à l'inverse de la longueur.

• On peut écrire : $I_1 = I(x) - I(x+dx) = -dI$; ceci implique $U(x+dx) = I_1 \frac{b}{dx} = -b\frac{dI}{dx}$ mais aussi : $-dU = U(x) - U(x+dx) = a\,I(x)\,dx$ et par conséquent $a\,I(x) = -\frac{dU}{dx}$. Par élimination de I, on obtient : $U(x+dx) = \frac{b}{a}\frac{d^2U}{dx^2}$, ce qui correspond à : $\frac{d^2U}{dx^2} - \frac{a}{b}U = 0$ (à la fin du calcul, on peut négliger la différence entre x et $x+dx$ en comparaison de la longueur du câble).

• L'intégration de cette équation correspond à : $U(x) = A\,e^{\alpha x} + B\,e^{-\alpha x}$ avec $\alpha = \sqrt{\frac{a}{b}}$; par suite : $I(x) = -\frac{1}{a}\frac{dU}{dx} = -\frac{A\alpha}{a}\,e^{\alpha x} + \frac{B\alpha}{a}\,e^{-\alpha x}$. Or le courant doit être nul à l'extrémité libre du câble : $I(L) = 0$; par suite : $A\,e^{2\alpha L} = B$; $U(x) = A\left[e^{\alpha x} + e^{\alpha.(2L-x)}\right]$; $I(x) = -\frac{A\alpha}{a}\left[e^{\alpha x} + e^{\alpha.(2L-x)}\right]$.

• La résistance de fuite est donc : $R_0 = \frac{U(0)}{I(0)} = \frac{a}{\alpha}\frac{1+e^{2\alpha L}}{e^{2\alpha L}-1} = \frac{a}{\alpha}\,\mathrm{cotanh}(\alpha L) = 19{,}1\ \mathrm{k\Omega}$.

◊ remarque : dans la limite des petites valeurs de a, on obtient : $R_0 = \frac{a}{\alpha}\,\mathrm{cotanh}(\alpha L) \approx \frac{a}{\alpha^2 L} = \frac{b}{L}$.

VI. Étude d'un électrolyseur

1. • Quand on ferme le circuit, un courant circule qui provoque la polarisation progressive de l'électrolyseur ; ceci correspond à l'apparition d'une f.c.e.m. E qui tend à s'opposer à E' et à diminuer le courant.

• Si $k > 1$, la polarisation fait tendre E vers E_0 ; le courant tend alors vers $\frac{E'-E_0}{R} = (k-1)\frac{E_0}{R} > 0$.

• Si $k < 1$, la polarisation fait tendre E vers $E' < E_0$ (E' ne peut pas être dépassée car cela nécessiterait un courant en sens inverse, qui ne peut pas être provoqué par le générateur) ; le courant tend alors vers 0.

2. • La loi des mailles donne : $E' - E - R\,I = 0$, donc pour en déduire une équation sur E il faut exprimer I en fonction de E. L'énoncé indique : $E = E_0\left(1 - e^{-q/Q_0}\right)$, d'où on déduit : $q = Q_0\,\ln\left(\frac{E_0}{E_0-E}\right)$ et $I = \frac{dq}{dt} = \frac{Q_0}{E_0-E}\frac{dE}{dt}$. On obtient donc : $k\,E_0 - E = \frac{R\,Q_0}{E_0-E}\frac{dE}{dt}$ c'est-à-dire : $\frac{dE}{(E_0-E)(k\,E_0-E)} = \frac{dt}{R\,Q_0}$.

• En décomposant en fonction de E : $\frac{1}{(E_0-E)(k\,E_0-E)} = \frac{A}{E_0-E} + \frac{B}{k\,E_0-E}$ on obtient alors : $A = -B = \frac{1}{(k-1)\,E_0}$ et donc : $\frac{dE}{E_0-E} - \frac{dE}{k\,E_0-E} = dt\,\frac{(k-1)\,E_0}{R\,Q_0}$.

• Ceci s'intègre sous la forme : $\ln\left(\left|\frac{E-E_0}{E-k\,E_0}\right|\right) = C - \alpha\,t$ avec $\alpha = \frac{(k-1)\,E_0}{R\,Q_0}$ et où C est une constante d'intégration. D'après les conditions initiales : $C = -\ln(k)$ et on obtient : $k\left|\frac{E-E_0}{E-k\,E_0}\right| = e^{-\alpha t}$.

• Il apparaît alors que $\forall\, t \in \mathbb{R}$: $E \neq E_0$ et $E \neq k\, E_0$ (en supposant $k \neq 1$, il faudrait $|\alpha\, t| = \infty$). Par suite la quantité $\frac{E-E_0}{E-k\,E_0}$ ne change pas de signe ; puisqu'elle vaut initialement $\frac{1}{k} > 0$ elle reste toujours positive. On obtient donc : $k\,\frac{E-E_0}{E-k\,E_0} = e^{-\alpha t}$ et finalement : $E = k\, E_0\, \frac{1-e^{-\alpha t}}{k-e^{-\alpha t}}$.

• Si $k > 1$, alors $\alpha > 0$ et E tend vers E_0 avec un courant limite : $I = \frac{E'-E_0}{R} = \frac{(k-1)\,E_0}{R} > 0$.

• Si $k < 1$, alors $\alpha < 0$ et E tend vers $E' = k\, E_0$ avec un courant limite : $I = \frac{E'-k\,E_0}{R} = 0$.

◊ remarque : on retrouve bien ainsi la caractéristique usuelle (affine par morceaux) de l'électrolyseur.