EC.I.a - ÉLECTROCINÉTIQUE - LOIS LOCALES

1. Charges et courants

1.1. Densité de courant

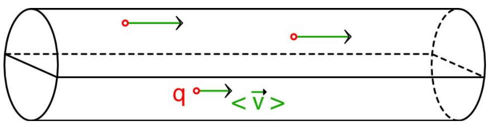
• Dans les conditions statiques, les particules (quasi-ponctuelles) portant des charges électriques ne sont par immobiles, mais animées de mouvements d'agitation thermique ; toutefois leur vitesse moyenne est nulle : $\langle\vec{v}\rangle = \vec{0}$.

Le courant électrique correspond à un léger mouvement d'ensemble : avec $\|\langle\vec{v}\rangle\| \approx 10^{-5}\ \mathrm{m.s^{-1}}$, alors que $\langle\|\vec{v}\|\rangle \approx 500\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

Dans de très nombreux raisonnements, on peut toutefois négliger l'agitation thermique et considérer uniquement les vitesses moyennes “locales”, avec la même précision qu'on représente un ensemble de charges ponctuelles par une charge volumique (ou densité volumique de charge) : $\rho = \frac{\delta q}{\delta \mathcal{V}}$.

◊ remarque : les moyennes doivent être calculées sur des volumes $\delta\mathcal{V}$ qui sont à la fois assez grands au niveau microscopique, pour supprimer les fluctuations liées à l'agitation thermique, mais petits au niveau macroscopique, pour permettre la description de phénomènes non uniformes à notre échelle (pour décrire des phénomènes variables dans le temps, il faut de même raisonner sur des intervalles de temps appropriés).

• Pour décrire en détail le courant électrique, le nombre des charges mobiles et leur vitesse moyenne “locale” peuvent dépendre de la portion de conducteur considérée.

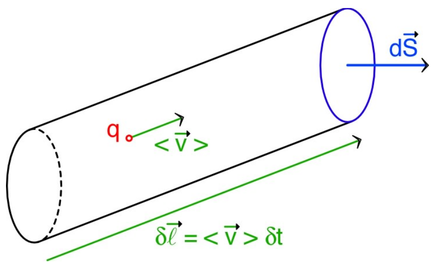


Ainsi, pour un conducteur cylindrique formé de deux matériaux différents, si les charges se “déplacent plus” dans la partie supérieure (plus nombreuses et/ou plus rapides), la contribution au courant total y est plus grande.

On peut alors définir (dans ce cas particulier simple) la “densité” de courant comme le “courant par unité de surface” à travers chaque partie de la section du conducteur : $j = \frac{\delta I}{\delta S}$ (unité de base : $\mathrm{A.m^{-2}}$).

• Il est également utile de décrire l'orientation “locale” du mouvement moyen des charges (vecteur $\langle\vec{v}\rangle$). Mais plus précisément, il faut exprimer l'orientation “locale” de l'effet de ce mouvement sur le courant : direction et sens de $q\,\langle\vec{v}\rangle$ (s'il n'y a qu'une sorte de porteurs de charge).

Selon cette orientation, une charge dQ qui traverse une surface infinitésimale $d\vec{S}$ pendant un intervalle de temps δt est : $dQ = \vec{j} \cdot d\vec{S}\,\delta t$ avec $\vec{j} = \rho\,\langle\vec{v}\rangle$. En effet, la contribution des charges q ayant une vitesse moyenne $\langle\vec{v}\rangle$ peut s'écrire : $dQ = \rho\, d\tau$ avec un volume infinitésimal $d\tau = d\vec{\ell} \cdot d\vec{S} = \langle\vec{v}\rangle \cdot d\vec{S}\,\delta t$.



En intégrant sur une surface S, la charge δQ qui traverse pendant un intervalle δt est donc : $\delta Q = \iint_S dQ = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}\ \delta t$.

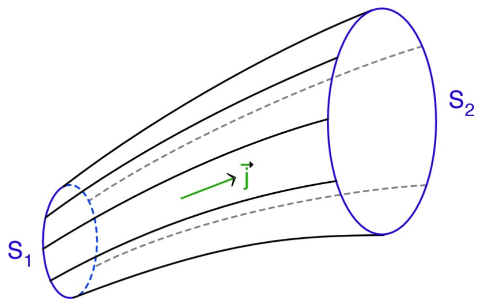
Le courant est alors : $I = \frac{\delta Q}{\delta t} = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$ (flux de la densité de courant).

• Dans le cas plus général où il y a plusieurs sortes de porteurs de charge (solution ionique par exemple), en notant q_i la charge des porteurs de type i et ρ_i leur charge volumique, alors on peut exprimer le vecteur densité de courant par la relation : $\vec{j} = \sum_i \left(\rho_i\,\langle\vec{v_i}\rangle\right)$.

Cette définition ne peut se faire autrement qu'en distinguant les contributions des différentes charges, car (entre autres) les charges + et -, qui ont des densités volumiques ρ_i de signes contraires, ont aussi des vitesses moyennes $\langle\vec{v_i}\rangle$ de sens contraires, donc des contributions de même sens à la densité de courant.

En outre, s'il y a plusieurs sortes de porteurs de charge de masses différentes, leurs vitesses moyennes sont différentes et contribuent différemment à la densité de courant, même si leurs charges sont égales.

◊ remarque : on peut visualiser l'écoulement local du courant à l'aide de “lignes de courant” (ligne en tout point tangente au vecteur $\vec{j}$) ; on peut également considérer des “tubes de courant” (tube délimité par l'ensemble des lignes de courant passant par le contour d'une surface S donnée) :



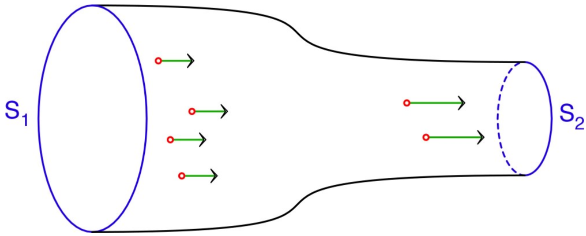
◊ remarque : les équations cartésiennes des lignes de courant peuvent être obtenues en intégrant les équations différentielles : $\frac{dx}{j_x} = \frac{dy}{j_y} = \frac{dz}{j_z}$ (d'après le parallélisme entre $\vec{j}$ et un déplacement $d\overrightarrow{OM}$ le long d'une telle ligne).

◊ remarque : pour des charges électriques réparties en surface, on peut aussi définir une densité surfacique de courant à partir des charges surfaciques σ_i ; on pose alors : $\overrightarrow{j_s} = \sum_i \, (\sigma_i \, \langle\overrightarrow{v_i}\rangle)$.

1.2. Conservation de la charge électrique

• La charge électrique totale est une quantité exactement conservée (contrairement à la masse, qui n'est conservée que dans l'approximation non relativiste). Par suite, la charge Q contenue dans un volume V, délimité par une surface fermée S, vérifie la relation : $-\frac{dQ}{dt} = I_{sortant} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$.

• Pour la surface fermée entourant le volume entre deux sections S_1 et S_2 d'un conducteur en régime permanent : $\frac{dQ}{dt} = 0$. Ainsi le courant doit être le même au travers des deux sections : $I_{sortant} = I_2 - I_1 = 0$.



En particulier, pour un fil conducteur de diamètre variable, la densité de courant en régime permanent doit donc être plus grande dans les zones où le diamètre est plus petit. Ainsi, dans la mesure où la densité volumique des porteurs de charge est uniforme, il y en a plus dans la section plus grande donc ils se déplacent en moyenne moins vite.

• En pratique, toute accumulation de charges crée un champ électrique qui provoque l'évacuation du surplus de charges. Dans les conditions usuelles, “l'équilibre dynamique“ correspondant au régime permanent est atteint très rapidement ($\approx 10^{-9}$ s dans un conducteur métallique ; $\approx 10^{-3}$ s dans une solution ionique).

Dans les conditions quasi-stationnaires, il ne peut s'accumuler des charges qu'en surface ou dans les zones où la conductivité varie (milieu inhomogène).

2. Conduction du courant

2.1. Conductivité et résistivité : loi d'Ohm locale

◊ remarque : pour simplifier, on considère dans ce qui suit des conducteurs métalliques où les seuls porteurs de charge sont des électrons ; les raisonnements sont aisément généralisables aux ions dans les électrolytes.

• Dans un milieu conducteur, les porteurs de charge sont soumis à un champ électrique “local”, somme du champ électrique imposé par l'extérieur et des champs exercés par les autres particules présentes dans le milieu.

On considère ici le champ électrique total moyen : on “élimine” les fluctuations microscopiques des effets “internes” par moyenne “locale” (dans chaque volume infinitésimal), sans se préoccuper de la façon dont ce champ s'établit sous l'effet des actions extérieures.

• Sous l'effet d'un champ électrique $\vec{E}$, les porteurs de charge sont accélérés, mais ils subissent des chocs aléatoires qui tendent à leur redonner “périodiquement” une vitesse aléatoire, ce qui “annule” en moyenne la vitesse qui leur avait été donnée par l'accélération.

L'effet global est analogue à l'effet d'un frottement : il s'établit (très rapidement) une vitesse moyenne limite $\langle\vec{v}\rangle$ proportionnelle à $\vec{E}$, donc une densité de courant proportionnelle au champ : $\vec{j} = \gamma\,\vec{E}$. Cette proportionnalité constitue la loi d'Ohm locale ; le coefficient γ est appelé “conductivité” (électrique).

• En considérant un porteur de charge de vitesse $\overrightarrow{v_0}$ juste après un choc, alors sous l'effet de l'accélération : $\vec{v} \approx \overrightarrow{v_0} + \frac{q}{m}\vec{E}\,t$. Donc, en moyenne sur l'intervalle entre deux chocs et sur l'ensemble des porteurs : $\langle\vec{v}\rangle \approx \langle\overrightarrow{v_0}\rangle + \frac{q}{m}\vec{E}\,\langle t\rangle$.

Mais $\langle\overrightarrow{v_0}\rangle = \vec{0}$ puisque les vitesses juste après un choc sont aléatoires, donc : $\langle\vec{v}\rangle \approx \frac{q\,\tau}{m}\vec{E}$ avec $\tau = \langle t\rangle$ (durée moyenne “entre deux chocs”, $\approx 10^{-14}\ s$ pour les électrons dans un métal dans les conditions usuelles).

La densité de courant peut alors s'écrire : $\vec{j} = \sum_i \left(\rho_i\,\langle\overrightarrow{v_i}\rangle\right) = \gamma\,\vec{E}$ avec la conductivité : $\gamma \approx \sum_i \frac{\rho_i\,q_i\,\tau_i}{m_i}$.

◊ remarque : puisque la vitesse croît progressivement pendant la durée entre deux chocs, la moyenne τ est un peu plus petite que le “temps moyen de collision”, mais il ne s'agit ici que d'une modélisation en première approximation.

◊ remarque : on raisonne avec un champ quasi uniforme et constant car les durées et distances entre deux chocs sont très petites ; on améliore ensuite éventuellement cette approximation en remplaçant la masse m_i par une “masse effective” m_i^* prenant en compte les effets moyens du milieu.

◊ remarque : on peut aussi écrire $\rho_i = n_i\, q_i$ où n_i est la concentration volumique de porteurs (nombre de particules par unité de volume) ; ceci correspond à : $\gamma \approx \sum_i \frac{n_i\, q_i^2\, \tau_i}{m_i}$ qui montre bien que les charges des deux signes contribuent constructivement au courant.

• Ces propriétés peuvent aussi s'écrire à l'aide de la “mobilité” μ_i des porteurs de charge, définie par : $\langle \vec{v_i} \rangle = \pm\, \mu_i\, \vec{E}$ avec $\mu_i = \left| \frac{q_i\, \tau_i}{m_i} \right|$ et $" \pm " = \mathrm{sgn}(q_i)$ pour décrire le sens.

La conductivité peut alors s'écrire : $\gamma \approx \sum_i \left(|\rho_i|\, \mu_i \right)$ (ceci est surtout utilisé en chimie pour la conductivité des électrolytes).

◊ remarque : on peut définir un coefficient de “résistivité” $\rho = \frac{1}{\gamma}$ mais il faut faire attention aux notations pour ne pas confondre avec la charge volumique.

2.2. Propriétés générales de la conductivité

• D'une façon générale, quand on élève la température d'un métal, la durée moyenne de collision τ diminue d'autant que l'agitation thermique augmente ; par suite la conductivité diminue et la résistivité augmente.

Au contraire, quand on échauffe un “semi-conducteur”, les chocs de l'agitation thermique ralentissent les porteurs de charge mais ils en augmentent le nombre (des porteurs supplémentaires sont “libérés” sous l'effet des chocs) ; l'effet global est une augmentation de la conductivité et une diminution de la résistivité.

• À très basse température (≈ 5 à $30\ \mathrm{K}$), la résistivité des métaux et de quelques autres composés devient nulle (conductivité infinie) ; c'est un effet quantique, appelé “supraconductivité”. Quand $T \to 0$, le comportement des porteurs devient dans ce cas “collectif” et fait en moyenne “disparaître” l'effet des chocs thermiques.

• Les milieux ioniques (cristallisés, ou vitreux comme le silicate de sodium) sont isolants à basse température tant que les ions sont “figés” sous forme solide ; ils deviennent conducteurs quand la température devient suffisante pour que le milieu soit fluide.

2.3. Conductance et résistance; loi d'Ohm globale

• Un résistor (ou “conducteur ohmique”) est un dipôle électrocinétique (c'est-à-dire avec deux bornes de branchement) vérifiant la loi d'Ohm.

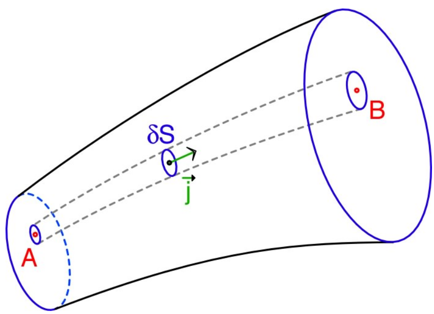
• Dans un tel dipôle, le courant est proportionnel à la tension U_{AB} appliquée entre les deux bornes du dipôle : $I = G\, U_{AB}$ où le coefficient de proportionnalité G est appelé “conductance” du dipôle.

En effet, soient A et B les deux bornes de branchement, la tension appliquée au dipôle correspond à la “circulation” du champ électrique entre A et B :

$$U_{AB} = V_A - V_B = -\int_A^B dV = -\int_A^B \vec{\nabla}V \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \,.$$

D'après la loi d'Ohm locale : $U_{AB} = \int_A^B \frac{\vec{j}}{\gamma} \cdot d\vec{\ell}$, donc si on intègre le long d'une ligne (ou d'un tube) de courant : $U_{AB} = \int_A^B \frac{j}{\gamma}\, d\ell$.

On peut alors considérer un tube de courant infinitésimal, de section δS dépendant de ℓ (le long du tube de courant infinitésimal), perpendiculaire au courant, donc sur une surface équipotentielle (car $\vec{j} \parallel \vec{E}$) ; ainsi : $j = \frac{\delta I}{\delta S}$.



Par suite : $U_{AB} = \delta I \int_A^B \frac{d\ell}{\gamma\, \delta S}$, c'est-à-dire que le courant dans le “tube” est proportionnel à la tension U_{AB} : $\delta I = \delta G\, U_{AB}$ avec un coefficient de proportionnalité : $\delta G = \frac{1}{\int_A^B \frac{d\ell}{\gamma\, \delta S}}$.

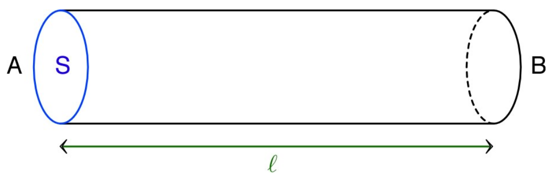
Mais puisque ceci est vrai pour tout tube de courant, c'est aussi vrai pour l'ensemble : $I = \int \delta I = G\, U_{AB}$ avec une conductance $G = \int \delta G$.

◊ remarque : ceci peut s'écrire $U_{AB} = R\, I$ avec une résistance $R = \frac{1}{G}$.

2.4. Exemple de calcul de conductance et de résistance

• Les expressions précédentes de G et R ne sont pas évidentes dans le cas général, mais elles sont simples dans les cas particuliers où les symétries simplifient les calculs.

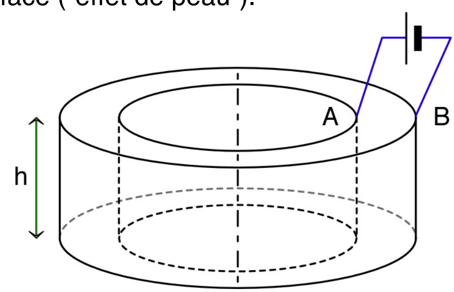
• Par exemple, pour une portion de conducteur cylindrique homogène, assez long pour qu'on puisse supposer l'invariance par translation le long de l'axe, on peut supposer que la densité de courant est uniformément répartie sur la section (ce qui est plausible pour un conducteur homogène). Ceci correspond, compte tenu de la loi d'Ohm locale, à un champ $\vec{E}$ uniforme.



Il est alors possible de faire un raisonnement simplifié adapté aux symétries du problème : $U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E\,\ell$ et $I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = j\,S$; mais $j = \gamma\,E$ donc : $I = \gamma\,E\,S = \gamma \frac{S}{\ell} U_{AB}$ c'est-à-dire $G = \frac{\gamma\,S}{\ell}$ et $R = \frac{\ell}{\gamma\,S}$.

◊ remarque : l'hypothèse d'une répartition uniforme de la densité de courant sur la section, dans le cas d'un conducteur homogène, n'est pas si évidente qu'on pourrait le croire; elle est correcte en courant continu, mais elle devient fausse en courant alternatif de haute fréquence : le courant circule alors préférentiellement à proximité de la surface (“effet de peau”).

• Pour un conducteur en forme de cylindre creux, auquel on applique une tension U_{AB} entre ses surfaces latérales interne et externe, le calcul est analogue (bien que moins simple).



D'après les symétries, on peut raisonnablement supposer que la densité de courant est radiale et ne dépend que de r : uniformément répartie par rapport à l'angle θ et l'altitude z (ce qui est plausible pour un conducteur homogène). Ceci correspond, compte tenu de la loi d'Ohm locale, à un champ $\vec{E}$ radial dont la coordonnée radiale E_r ne dépend que de r.

Le raisonnement simplifié adapté aux symétries du problème donne alors : $U_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} E_r(r)\, dr$ et $I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = 2\pi\, r\, h\, j(r)$ quel que soit r (d'après la conservation de la charge). Finalement : $E_r(r) = \frac{j(r)}{\gamma} = \frac{I}{\gamma\, 2\pi\, r\, h}$ et $U_{AB} = R\, I$ avec $R = \frac{1}{\gamma\, 2\pi\, h} \ln\left(\frac{r_B}{r_A}\right)$.

◊ remarque : l'argument d'invariance de I en fonction de r donne un champ en $\frac{1}{r}$ comme ce qui serait déduit du théorème de Gauss en supposant une charge surfacique uniforme sur les faces A et B, mais ce n'en est pas une conséquence (le régime permanent en milieu homogène indique que la charge volumique est nulle, mais la répartition des charges en surface des conducteurs découle des symétries).

🕮 *exercices n° I et II.*

3. Aspects énergétiques; loi de Ioule

• Lorsque les actions extérieures causent dans le conducteur un champ électrique $\vec{E}$, celui-ci fournit du travail aux porteurs de charge pendant la durée de l'accélération (entre deux chocs) : $dw_i = \vec{F_i} \cdot d\overrightarrow{OM_i} = q_i\, \vec{E} \cdot \vec{v_i}\, dt$; mais après chaque choc les vitesses sont à nouveau aléatoires, donc ce travail provenant des actions extérieures est transmis au conducteur.

En moyenne sur l'ensemble des porteurs de charge dans un volume $\delta\mathcal{V}$: $dW = \sum\left(\rho_i\, \vec{E} \cdot \langle\vec{v_i}\rangle\right)\, dt\, \delta\mathcal{V} = \vec{j} \cdot \vec{E}\, dt\, \delta\mathcal{V}$. La puissance reçue par $\delta\mathcal{V}$ est donc : $\delta\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{E}\, \delta\mathcal{V}$.

Ceci correspond à une densité volumique de puissance :

$$p = \frac{\delta\mathcal{P}}{\delta\mathcal{V}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma\, E^2 = \frac{j^2}{\gamma} \text{ (effet Joule).}$$

• Intégrée sur l'ensemble du volume d'un conducteur ohmique, cette densité de puissance donne la puissance Joule : $\mathcal{P} = \int \vec{j} \cdot \vec{E} \, d\mathcal{V} = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} \ \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ avec $d\vec{\ell}$ le long d'une ligne de courant et $d\vec{S}$ sur une section équipotentielle du conducteur ; par suite : $\mathcal{P} = U_{AB} \, I = G \, U_{AB}^2 = R \, I^2$.

◊ remarque : pour un dipôle quelconque (en régime permanent), il faut tenir compte des f.e.m. et f.c.e.m. et le calcul “local” est en général compliqué.

🕮 *exercice n° III.*