E.C.III - ÉLECTROCINÉTIQUE - RÉSEAUX

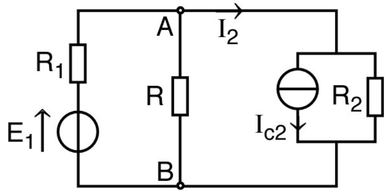
1. Principe de superposition (théorème d'Helmholtz)

• Pour un réseau dont les dipôles ont des caractéristiques affines, les équations décrivant le circuit sont linéaires : $\sum_j (R_{ij}\ I_{ij}) = \sum_j E_{ij}$ où les coefficients R_{ij} sont des résistances, où les E_{ij} sont des forces électromotrices (f.e.m.) et où on somme sur les branches j constituant la maille i.

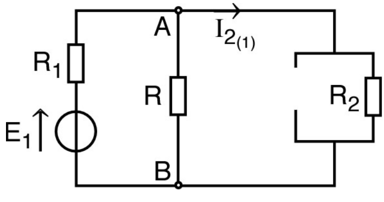
Pour de tels systèmes d'équations (linéaires), les courants et tensions causés par plusieurs générateurs sont les sommes des courants et tensions causés respectivement par chacun des générateurs (vrais ou modélisés).

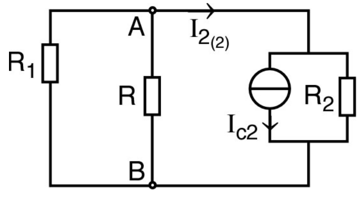
☞ remarque : ceci suppose toutefois que les f.e.m. ont des valeurs “fixées” ; on ne peut pas généraliser aux dipôles “commandés” (dont la caractéristique dépend des tensions et/ou courants dans le circuit).

• On peut considérer par exemple le calcul du courant I_2 , puis de la tension U_{AB} , dans le montage ci-contre.



• Le courant causé par le générateur E_1 est : $I_{2_{(1)}} = \frac{R\ E_1}{R_1\ R_2 + (R_1+R_2)\ R}$; le courant causé par le générateur I_{c2} est : $I_{2_{(2)}} = \frac{(R+R_1)\ R_2\ I_{c2}}{R_1\ R_2 + (R_1+R_2)\ R}$.





Le courant total cherché est donc : $I_2 = I_{2_{(1)}} + I_{2_{(2)}} = \frac{R\ E_1 + (R+R_1)\ R_2\ I_{c2}}{R_1\ R_2 + (R_1+R_2)\ R}$.

• Le principe de superposition s’applique aussi pour les tensions :

$$U_{AB_{(1)}} = R_2\, I_{2_{(1)}} = \frac{R\, R_2\, E_1}{R_1\, R_2 + (R_1+R_2)\, R}\ ;$$

$$U_{AB_{(2)}} = R_2 \,.\left(I_{2_{(2)}} - I_{c2}\right) = -\frac{R\, R_1\, R_2\, I_{c2}}{R_1\, R_2 + (R_1+R_2)\, R}\ ;$$

donc au total : $U_{AB} = U_{AB_{(1)}} + U_{AB_{(2)}} = R\, R_2\, \frac{E_1 - R_1\, I_{c2}}{R_1\, R_2 + (R_1+R_2)\, R}$ (résultat de la loi de Millman).

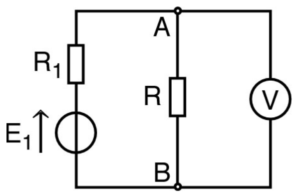
🕮 *exercice n° I.*

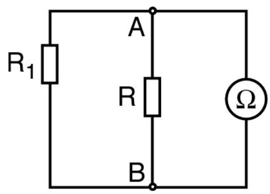
2. Théorème de Thévenin

• Si on ne s'intéresse qu'à l'une des branches, le calcul peut être simplifié.

D’après la linéarité des équations (caractéristiques affines), toute partie du réseau entre deux nœuds A et B donnés possède une caractéristique affine ; elle peut donc être représentée symboliquement par un générateur de Thévenin équivalent (théorème de Thévenin).

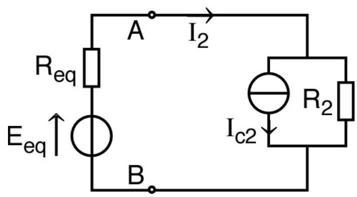
• Dans l'exemple étudié précédemment, la partie gauche du montage a une f.e.m. correspondant à sa tension “à vide” : $E_{eq} = U_{AB_{(0)}} = E_1\, \frac{R}{R+R_1}$ et une résistance (générateur “arrêté”) : $R_{eq} = \frac{R\, R_1}{R+R_1}$.



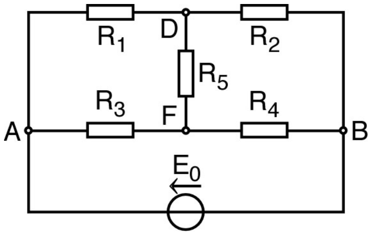


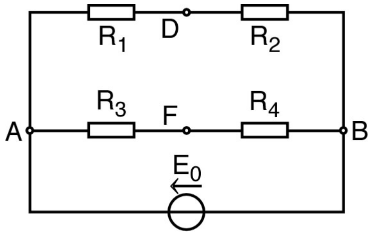
Il suffit alors d'en déduire le courant cherché par la loi de Pouillet :

$$I_2 = \frac{E_{eq} - R_2\, I_{c2}}{R_{eq} + R_2} = \frac{E_1\, R - R_2\, I_{c2}.(R+R_1)}{R_1\, R_2 + (R_1+R_2)\, R}\ .$$



• On peut chercher par cette méthode la condition d'équilibre d'un pont de Wheatstone, en considérant le courant dans la branche DF ($I_5 = 0$) :





(circuit “à vide”)

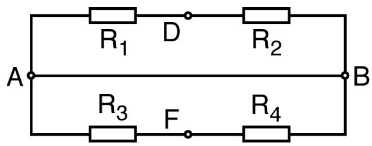
La f.e.m. (tension U_{DF} “à vide”, en l'absence de R_5) peut se calculer par la méthode du pont diviseur de tension :

$$U_{AD} = E_0 \, \frac{R_1}{R_1+R_2} \quad \text{et} \quad U_{AF} = E_0 \, \frac{R_3}{R_3+R_4} \ ;$$

$$E_{eq} = U_{DF} = U_{AF} - U_{AD} = E_0 \, \frac{R_2 \, R_3 - R_1 \, R_4}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)} \ .$$

La résistance équivalente entre D et F (générateur à l'arrêt) est :

$$R_{eq} = \frac{R_1 \, R_2}{R_1+R_2} + \frac{R_3 \, R_4}{R_3+R_4} \ .$$



• Si on cherche surtout “l’équilibre du pont”, défini par l’une ou l’autre des conditions : $I_5 = \frac{E_{eq}}{R_{eq}+R_5} = 0$ ou $U_{DF} = R_5 \, I_5 = 0$, on obtient : $E_{eq} = 0$, donc : $R_1 \, R_4 = R_2 \, R_3$.

3. Théorème de Norton

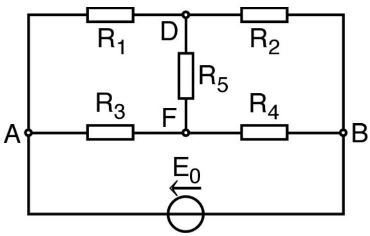
• De même, pour un montage dont tous les dipôles ont des caractéristiques affines, toute partie du réseau entre deux nœuds A et B donnés possède aussi une caractéristique affine ; elle peut donc aussi être représentée symboliquement par un générateur de Norton équivalent (théorème de Norton).

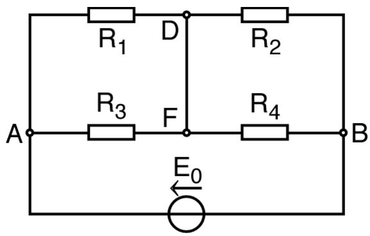
En particulier, pour l’assemblage de deux générateurs en parallèle : les courants de court-circuit s’ajoutent et les conductances s’ajoutent.

◊ remarque : d'après l'équivalence des représentations de Thévenin et Norton ($U = E - R\,I$ équivaut à $I = I_c - G\,U$ avec $I_c = \frac{E}{R}$ et $G = \frac{1}{R}$), le théorème de Norton n'est qu'une autre façon d'exprimer le théorème de Thévenin.

• On peut chercher ainsi la condition d'équilibre du pont de Wheatstone envisagé précédemment.

Le courant de court-circuit (en court-circuitant R_5) peut se calculer à partir de la loi de Pouillet et de la méthode du "pont diviseur de courant" :





(circuit "à vide")

$$I_0 = \frac{E_0}{R_{13}+R_{24}} \quad \text{avec} \quad R_{13} = \frac{R_1\,R_3}{R_1+R_3} \quad \text{et} \quad R_{24} = \frac{R_2\,R_4}{R_2+R_4} \ ;$$
$$I_1 = I_0\,\frac{R_3}{R_1+R_3} \quad \text{et} \quad I_2 = I_0\,\frac{R_4}{R_2+R_4} \ ;$$
$$I_{c_{eq}} = I_{DF} = I_1 - I_2 = E_0\,\frac{R_2\,R_3 - R_1\,R_4}{R_1\,R_3.(R_2+R_4)+R_2\,R_4.(R_1+R_3)} \ .$$

Le calcul de la conductance équivalente $(G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}})$ entre D et F est le même que pour la méthode de Thévenin.

• Si on cherche surtout "l'équilibre du pont", défini par l'une ou l'autre des conditions : $U_{DF} = \frac{I_{c_{eq}}}{G_{eq}+G_5} = 0$ ou $I_5 = G_5\,U_{DF} = 0$, on obtient : $I_{c_{eq}} = 0$, donc ici encore : $R_1\,R_4 = R_2\,R_3$.

📖 *exercices n° II et III.*