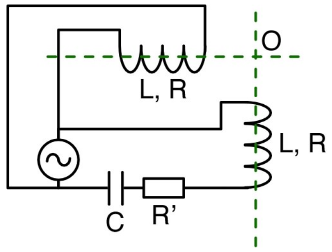
RÉGIME SINUSOÏDAL - NOTION D'IMPÉDANCE - exercices

A. EXERCICES DE BASE

I. Réalisation d'un champ tournant

• Deux bobines identiques, d'inductance L et de résistance R, sont disposées de façon que leurs axes se coupent à angle droit, en un point O équidistant de leurs centres :



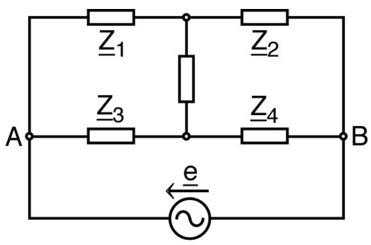
1. • Montrer que si ces bobines sont alimentées par des courants alternatifs de pulsation ω_0 et de même amplitude I_m , mais déphasés de $\frac{\pi}{2}$, alors le champ magnétique résultant en O a une norme constante et tourne dans le plan à la vitesse angulaire ω_0 .

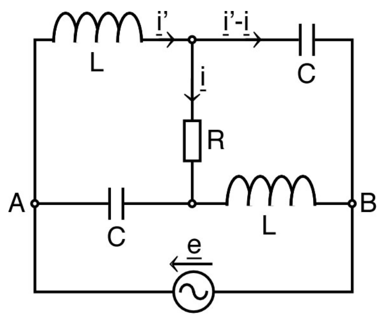
◊ indication : au voisinage du point O, chaque bobine crée un champ magnétique orienté selon son axe.

2. • Quelle capacité C et quelle résistance R' doit-on placer en série avec l'une des bobines pour réaliser les conditions précédentes ?

II. Pont de Wheatstone en régime alternatif

• On considère un "pont de Wheatstone" alimenté par un générateur de tension alternative, de pulsation ω telle que $L\,C\,\omega^2 = 1$.





1. • La généralisation directe des démonstrations en régime continu suggère que la condition d'équilibre du pont, correspondant à un courant nul dans la branche centrale, peut s'écrire : $\underline{Z}_1\,\underline{Z}_4 = \underline{Z}_2\,\underline{Z}_3$.

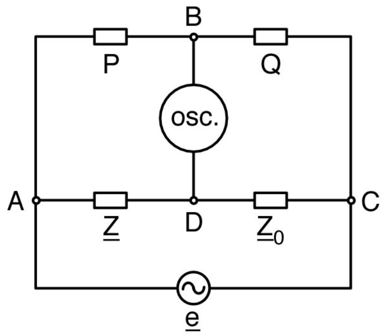
• On suppose que les bobines d'inductance L ont une résistance nulle. Vérifier que la condition "usuelle" d'équilibre du pont est réalisée. En conclure quelle valeur devrait avoir le courant $\underline{i}$.

2. • En utilisant les symétries du problème, préciser la répartition des courants dans toutes les branches du circuit. En déduire que le courant dans la résistance est : $\underline{i} = -\mathrm{j}C\omega\,\underline{e}$.

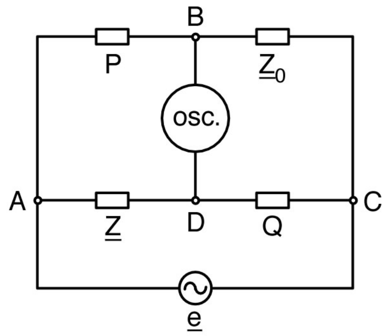
3. • Pour éviter la contradiction entre les deux résultats précédents, reprendre le calcul général de $\underline{i}$ (par exemple avec le théorème de Thévenin) en prenant en compte la résistance r des bobines, puis en faisant tendre r vers zéro.

III. Pont en “P/Q” et pont en “PQ”

• On considère les montages en “pont de Wheatstone” suivants, où P et Q sont des résistances, $\underline{Z}$ est une impédance inconnue, et $\underline{Z}_0$ est une impédance complexe réglable connue (par exemple un assemblage de boites de résistances et de boites de capacités) ; le “détecteur” utilisé est un oscilloscope.



pont en “P/Q”

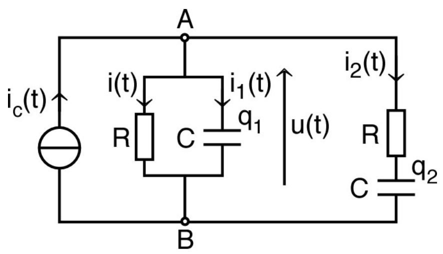


pont en “PQ”

• Écrire, pour chaque montage, la condition d'équilibre ; montrer que le montage en “P/Q” permet de comparer des impédances de même nature (capacités ou inductances), alors que le montage en “PQ” permet de comparer des capacités à des inductances.

IV. Équation différentielle

1. • On considère le circuit suivant, soumis à un échelon de courant ($i_c(t) = 0$ pour $t < 0$; $i_c(t) = I$ constant pour $t \geq 0$) ; on suppose en outre que les condensateurs sont initialement non chargés).



a) Écrire les relations entre les cinq inconnues : i , i_1 , i_2 , q_1 et q_2 .
b) En déduire l'équation différentielle vérifiée par $i_2(t)$.

2. • On suppose maintenant que le générateur de courant impose un régime sinusoïdal permanent (d'après $\underline{i}_c(t) = I_m \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$).
a) En considérant les impédances complexes, établir l'expression de $\underline{i}_2(t)$.
b) Vérifier qu'on peut ainsi retrouver rapidement l'équation différentielle obtenue à la question (1).

B. EXERCICE D'APPROFONDISSEMENT

V. Transformée de Fourier

• Cet exercice décrit une méthode générale d'étude des réseaux à partir des régimes sinusoïdaux, pour les systèmes obéissant à une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

• Soit $f(t)$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, c'est à dire telle que $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt$ existe ; ceci suppose que $f(t)$ décroit suffisamment vite à l'infini. On définit une autre fonction par : $\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\, dt$ où $\omega \in \mathbb{R}$. La fonction $\varphi(\omega)$ est appelée “transformée de Fourier” de $f(t)$, ce qui peut se noter de façon formelle : $\varphi = \mathcal{F}\{f\}$. On admet ici que, dans des conditions assez générales, la transformation de Fourier est biunivoque

1. a) Montrer que : $\mathcal{F}\{\lambda\, f(t) + \mu\, g(t)\} = \lambda\, \mathcal{F}\{f(t)\} + \mu\, \mathcal{F}\{g(t)\}$.
   b) Montrer que : $\mathcal{F}\{f(\alpha\, t)\} = \frac{1}{|\alpha|}\, \varphi\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$.
   c) Montrer que : $\mathcal{F}\{f(t + t_0)\} = \varphi(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\, t_0}$.
   d) Montrer que : $\mathcal{F}\{f(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0\, t}\} = \varphi(\omega - \omega_0)$.
   e) Montrer que : $\mathcal{F}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \mathrm{j}\omega\, \varphi(\omega)$.
   f) Montrer que : $\mathcal{F}\{\mathrm{j}t\, f(t)\} = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$.
   g) Montrer que : $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(u)\, du\right\} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\, \varphi(\omega)$.

2. • Le “produit de convolution” $h = f * g$ de deux fonctions intégrables f et g est une fonction définie par la relation : $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)\, g(\tau)\, d\tau$.
   • Montrer que : $\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\}\ \mathcal{F}\{g\}$.

3. • On peut définir une transformation de Fourier inverse : $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\, d\omega = \tilde{\mathcal{F}}\{\varphi\}$.
   • Commenter.

4. • On considère le circuit ci-contre, en régime sinusoïdal permanent.
   a) Écrire l'équation intégro-différentielle entre $i(t)$ et $e(t)$.
   b) En posant : $\mathcal{I}(\omega) = \mathcal{F}\{i(t)\}$ et $\mathcal{E}(\omega) = \mathcal{F}\{e(t)\}$, trouver la relation entre $\mathcal{I}(\omega)$ et $\mathcal{E}(\omega)$; commenter.