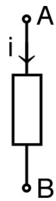
EC.VII - RÉGIME SINUSOÏDAL - ADAPTATIONS

1. Puissance en régime sinusoïdal permanent

1.1. Puissance moyenne et valeurs efficaces

• La puissance instantanée reçue par un dipôle est :
$p(t) = u_{AB}(t)\ i(t)$ (convention “récepteur”).



◊ remarque : la notation complexe est ici moins pratique car elle s'applique surtout aux opérations linéaires : $\mathrm{Re}(\underline{u}\ \underline{i}) \neq \mathrm{Re}(\underline{u})\ \mathrm{Re}(\underline{i})$.

On obtient ainsi en régime sinusoïdal :

$$p(t) = U_m\ \cos(\omega\ t + \phi)\ I_m\ \cos(\omega\ t)$$
$$= \frac{1}{2}\ U_m\ I_m\ [\cos(\phi) + \cos(2\ \omega\ t + \phi)]\ .$$

Ceci donne une variation sinusoïdale autour de la puissance moyenne :

$$P = \langle\ p\ \rangle\ = \frac{1}{2}\ U_m\ I_m\ \cos(\phi)\ .$$

• Pour un dipôle linéaire, sans f.e.m., la relation $U_m = Z\ I_m$ correspond à :

$$P = \frac{1}{2}\ Z\ I_m^2\ \cos(\phi) = \frac{1}{2}\ R\ I_m^2\ .$$

Ainsi, en moyenne, les inductances et capacités (réactances) restituent à certains moments autant d'énergie qu'elles consomment à d'autres moments.

• Pour retrouver une expression analogue à celle utilisée en régime continu, on définit les “valeurs efficaces” : $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ et $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$.

Ainsi on obtient : $P = U\ I\ \cos(\phi)$, où le coefficient “$\cos(\phi)$” est appelé “facteur de puissance” ; pour un dipôle linéaire : $P = Z\ I^2\ \cos(\phi) = R\ I^2$.

◊ remarque : I et U ne sont pas des valeurs “continues” mais des moyennes quadratiques (on note I_{eff} et U_{eff} s'il y a un risque d'ambiguïté) :

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [i(t)]^2 \, dt} \quad ; \quad U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [u(t)]^2 \, dt} \quad ;$$

ainsi le facteur $\sqrt{2}$ provient de $\langle \sin^2(\omega\, t) \rangle = \langle \cos^2(\omega\, t) \rangle = \frac{1}{2}$ pour les sinusoïdes ; ce coefficient dépend de la forme du signal et il faut par exemple utiliser $\sqrt{3}$ pour des signaux triangulaires.

◊ remarque : les réseaux de distribution d'énergie électrique imposent à leurs clients la condition $\cos(\phi) > 0{,}9$ afin de faire circuler, pour P et U fixés, un courant $I = \frac{P}{U\, \cos(\phi)}$ le plus faible possible : ceci limite les pertes par effet Joule dans les lignes de transport.

◊ remarque : on peut utiliser la grandeur complexe : $\underline{P} = \underline{U}\, \underline{I}^* = U\, I\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$, mais cette quantité (“produit scalaire” des représentants complexes $\underline{U}$ et $\underline{I}$) ne respecte pas la convention usuelle :

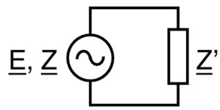
◊ ce n'est pas un représentant de P, puisque $P \neq \left| \underline{P} \right|$;

◊ ce n'est pas un représentant de $p(t)$, puisque $\mathrm{Re}(\underline{P}) = P$ ne représente pas les variations de $p(t)$.

1.2. Adaptation d'impédance

• Le facteur de puissance influence le choix des dipôles intervenant dans les circuits si on veut obtenir une "bonne adaptation".

Pour un générateur de f.e.m. efficace $\underline{E} = E$ (référence des phases) et d'impédance $\underline{Z}$, branché sur un “circuit utile” d'impédance $\underline{Z}'$, comment ajuster $\underline{Z}'$ pour que la puissance reçue par $\underline{Z}'$ soit maximum ?



L'impédance du circuit total en série est $\underline{Z} + \underline{Z}'$ et le courant est : $\underline{I} = \frac{E}{\underline{Z}+\underline{Z}'}$. La tension aux bornes du circuit utile est : $\underline{U} = \underline{Z}'\,\underline{I}$ et la puissance moyenne reçue par le circuit utile est : $P = R'\,I^2$ avec $R' = \mathrm{Re}(\underline{Z}')$.

Pour ajuster $\underline{Z}'$, on doit ajuster deux paramètres réels indépendants ; on peut par exemple poser : $\underline{Z} = R + \mathrm{j}\,S$ et $\underline{Z}' = R' + \mathrm{j}\,S'$ puis ajuster R' et S'.

Pour $\underline{Z}$ et R' fixés, la puissance $P = R'\,I^2 = \frac{E^2\,R'}{(R+R')^2+(S+S')^2}$ est maximum pour $S' = -S$. Dans ces conditions (pour $S' = -S$ fixé), $P = \frac{E^2\,R'}{(R+R')^2}$ est maximum pour $R' = R$ (et $P_{max} = \frac{E^2}{4\,R}$).

◊ remarque : pour un générateur donné, l'adaptation n'est que médiocre : l'effet Joule dans le générateur est aussi grand que la puissance utile ; si on a le choix du générateur, il faut choisir R plus faible et E plus grande.

◊ remarque : inversement, il est utile de transporter l'énergie électrique avec de plus faibles courants ($I' \ll I$) dans des lignes à plus haute tension ($U' \gg U$) ; pour une même puissance $P \approx U\,I \approx U'\,I'$ consommée par l'utilisateur, la puissance $P' = r\,I'^2$ perdue dans les lignes est d'autant plus faible (mais cela se limite au transport car les hautes tensions sont dangereuses, donc il faut utiliser des transformateurs en régime sinusoïdal).

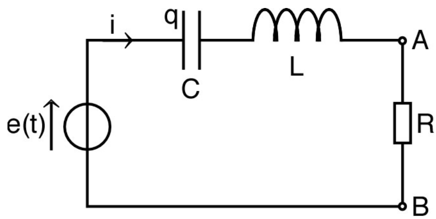
📖 *exercice n° I.*

2. Influence de la fréquence ; circuit “RLC” série

2.1. Résonance en courant (étude du résistor)

• On considère un circuit “RLC” série soumis à une f.e.m. $e(t)$ sinusoïdale :

$\underline{e}(t) = \underline{E_m}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$, où $\underline{E_m} = E_m\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$.



Après amortissement d'un régime transitoire, le courant est :

$\underline{i}(t) = \underline{I_m}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$, où $\underline{I_m} = I_m\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}$.

On convient ici de choisir l'origine des temps telle que $\psi = 0$ (référence des phases), donc $\underline{I_m} = I_m$ réel.

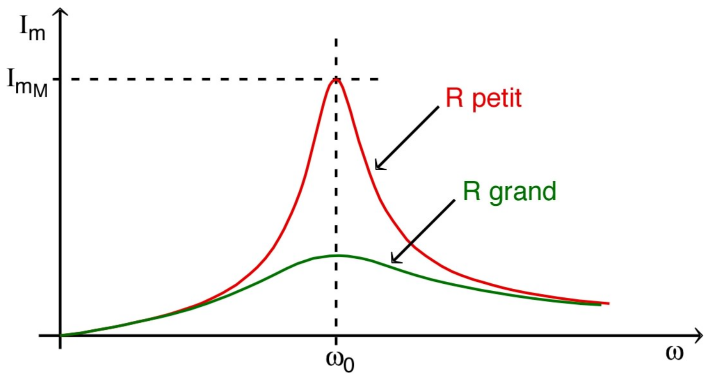
• On en déduit : $\underline{i}(t) = \frac{\underline{e}(t)}{\underline{Z}}$ avec $\underline{Z} = R + \mathrm{j}\left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)$; donc : $I_m = \frac{E_m}{Z}$ avec $Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)^2}$ et $\phi = \arg(\underline{Z}) = \arctan\left(\frac{L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}}{R}\right)$.

• Qualitativement, on constate qu'à basse fréquence : $Z \approx \frac{1}{C\,\omega} \gg R$; le condensateur gène le passage du courant continu : c'est le régime capacitif.

À haute fréquence : $Z \approx L\,\omega \gg R$; la bobine gène les variations rapides du courant à cause des variations de flux magnétique : c'est le régime inductif.

Aux fréquences moyennes : $Z \approx R$ est minimum et $I_m = \frac{E_m}{Z}$ est maximum : c'est le régime résistif.

On observe ainsi une “résonance” pour $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}$ (pulsation propre) et cette résonance est d'autant plus amortie que R est grand : $I_{m_M} = \frac{E_m}{R}$.

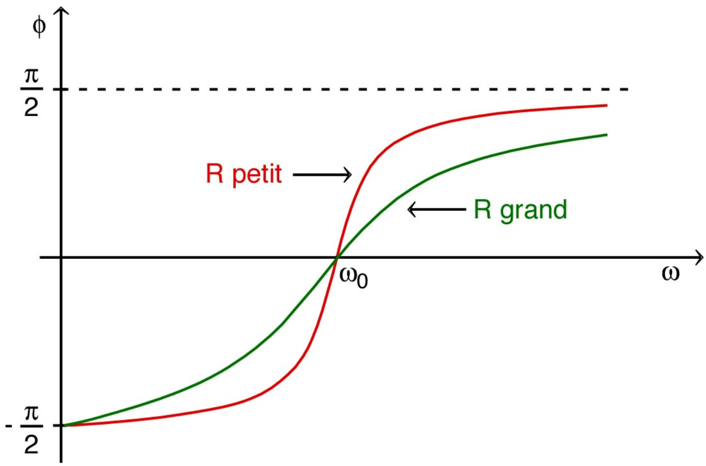


• De même pour la phase, on observe un “saut de phase” pour $\omega = \omega_0$ (avec $\phi = 0$ à la résonance) et ce saut est d'autant plus amorti que R est grand.

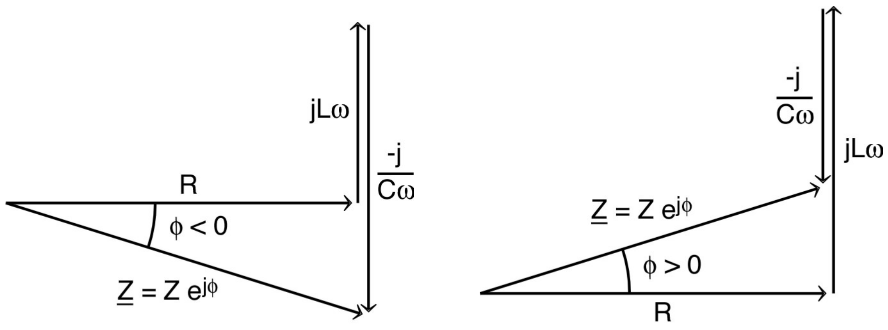
À basse fréquence : $\tan(\phi) \approx -\frac{1}{R\,C\,\omega} < 0$; i est en avance sur e car il faut le temps de charger le condensateur.

À haute fréquence : $\tan(\phi) \approx \frac{L\,\omega}{R} > 0$; e est en avance sur i car la bobine s'oppose aux variations du courant.

Enfin à la résonance : $\tan(\phi) \approx 0$; e est en phase avec i (régime résistif).



• Les variations de $\underline{Z}$ et les régimes qui en découlent peuvent être représentés par des “diagrammes de Fresnel”, qui décrivent $\underline{Z}$ dans le plan complexe (on peut également tracer un diagramme de Fresnel pour les tensions, cela revient à tout multiplier par I_m).



régime capacitif régime inductif

• On peut caractériser l'acuité de la résonance par la “bande passante”, définie comme l'intervalle de fréquence où : $\left|L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right| \leq R$ (régime résistif). Ceci correspond aux valeurs de ω telles que : $\frac{I_{m_M}}{\sqrt{2}} \leq I_m(\omega) \leq I_{m_M}$, mais aussi telles que : $-\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$.

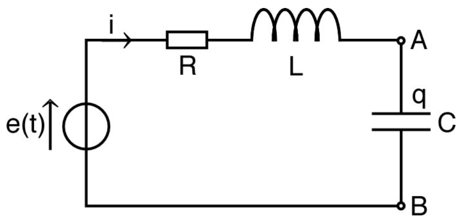
La résolution de l'inéquation conduit à la bande passante : $\Delta\omega = \frac{R}{L}$, d'autant plus large que l'amortissement est grand.

◊ remarque : on repère aussi l'acuité de la résonance par le “facteur de qualité”, ou “facteur de surtension” : $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{L\,\omega_0}{R} = \frac{1}{R\,C\,\omega_0}$.

◊ remarque : on a supposé que R, L et C sont des constantes (indépendantes de la fréquence) ; le principal défaut de ce modèle trop simple est que le champ magnétique variable dans une bobine réelle fait nettement varier $R(\omega)$ (“effet de peau” et courants induits dans le noyau s'il y en a un).

2.2. Résonance en charge (étude du condensateur)

• On peut également étudier la résonance en tension $u = u_C$ aux bornes du condensateur (dont la charge est l'analogue de l'amplitude de mouvement pour les systèmes mécaniques).



Les différences essentielles pour les variations de U_m sont :

◊ que la fréquence de résonance dépend de R : elle est d'autant inférieure à la fréquence propre que la résistance est grande ; elle tend vers zéro pour une valeur “critique” $R = R_c = \sqrt{\frac{2\,L}{C}}$ (différente de celle des régimes transitoires) ; il n'y a pas de maximum U_{m_M} pour $R \geq R_c$;

◊ que U_m ne tend pas vers zéro mais vers E_m quand la fréquence tend vers zéro ; le facteur de surtension (d'où son nom) est alors égal à $Q = \frac{U_{m_M}}{E_m}$.

La différence essentielle pour les variations de la phase ϕ’ de $u_C(t)$ par rapport à $e(t)$ est que cette phase varie de 0 à $-\pi$ (alors que la phase ϕ de $i(t)$ par rapport à $e(t)$ varie de $\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$).

🕮 *exercice n° II.*