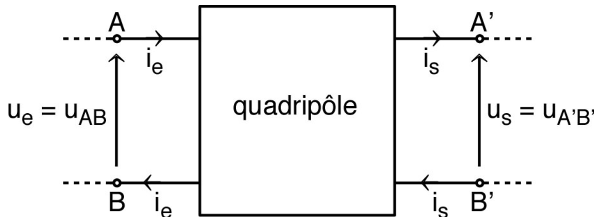
EC.VIII - RÉGIME SINUSOÏDAL - QUADRIPÔLES

1. Conventions de notation

• Un quadripôle électrocinétique est une portion de circuit reliée au “reste” du réseau par quatre bornes de branchement :



◊ remarque : comme pour les dipôles, les quadripôles sont respectivement “actifs” ou “passifs” selon qu’ils comportent ou non une source d'énergie.

• On définit les conventions de notation en se limitant aux cas usuels avec :
- ◊ deux “bornes d’entrée” (reliées à un dipôle générateur) par où passe un même “courant d’entrée” i_e ;
- ◊ deux “bornes de sortie” (reliées à un dipôle récepteur) par où passe un même “courant de sortie” i_s .

2. Caractéristiques d’entrée et de sortie

2.1. Définitions

• Pour le circuit branché en entrée, le quadripôle est décrit par une caractéristique dipolaire affine (éventuellement linéarisée) : $\underline{u_e} = \underline{e_e} + \underline{Z_e}\,\underline{i_e}$ où $\underline{e_e}$ est la f.e.m. d’entrée et où $\underline{Z_e}$ est l'impédance d’entrée (notations complexes).

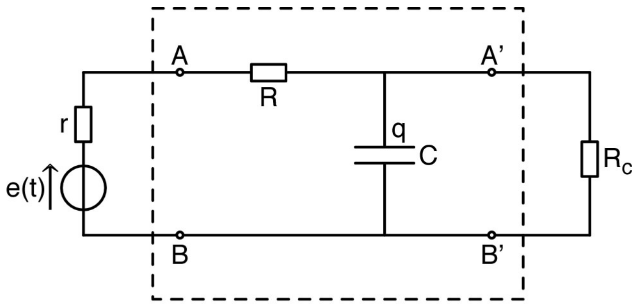
☞ remarque : les grandeurs $\underline{e_e}$ et $\underline{Z_e}$ dépendent en général de ce qui est branché en sortie du quadripôle.

• De même, pour le circuit branché en sortie, le quadripôle est décrit par une caractéristique affine (éventuellement linéarisée) : $\underline{u}_s = \underline{e}_s - \underline{Z}_s\,\underline{i}_s$ où $\underline{e}_s$ est la f.e.m. de sortie et où $\underline{Z}_s$ est l'impédance de sortie.

☞ remarque : les grandeurs $\underline{e}_s$ et $\underline{Z}_s$ dépendent en général de ce qui est branché en entrée du quadripôle.

2.2. Exemple d’un circuit “RC”

• Soit un circuit “RC”, alimenté en entrée par un générateur de résistance r et avec en sortie, aux bornes du condensateur, une résistance (charge) R_c .

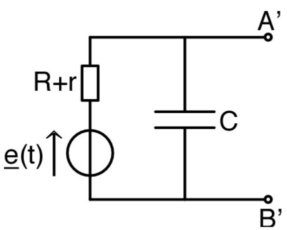


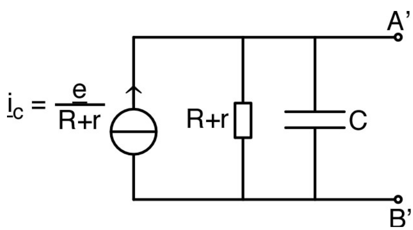
quadripôle

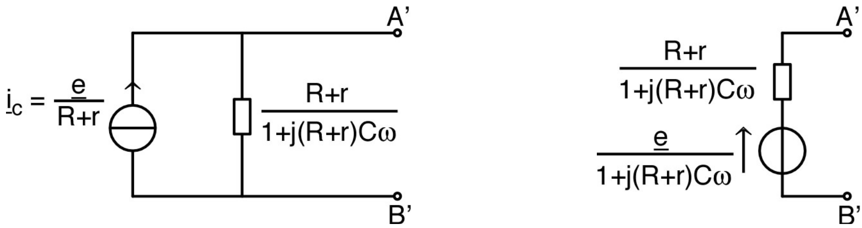
Les lois d’association des dipôles donnent alors : $\underline{u}_e = \underline{Z}_e\,\underline{i}_e$ avec :

$$\underline{Z}_e = R + \frac{R_C\,\underline{Z}_C}{R_C+\underline{Z}_C} = R + \frac{R_C}{1+\mathrm{j}\,R_C\,C\omega} \quad \text{et} \quad \underline{e}_e = 0 .$$

• On peut de même étudier la caractéristique de sortie en utilisant les équivalences Thévenin-Norton (ou le théorème de Thévenin et la loi de Millman...).







On obtient ainsi : $\underline{u}_s = \underline{e}_s - \underline{Z}_s\, \underline{i}_s$ avec :

$\underline{e}_s = \frac{e}{1+\mathrm{j}\,(R+r)\,C\omega}$ et $\underline{Z}_s = \frac{R+r}{1+\mathrm{j}\,(R+r)\,C\omega}$.

🕮 *exercices n° I et II.*

3. Fonctions de transfert

3.1. Définitions

• Pour caractériser un quadripôle, on utilise en outre des relations entre les grandeurs de sortie et les grandeurs d'entrée.

À partir de : $\underline{u}_e = \underline{U}_{em}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$; $\underline{i}_e = \underline{I}_{em}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$; $\underline{u}_s = \underline{U}_{sm}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$; $\underline{i}_s = \underline{I}_{sm}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$; on définit les “fonctions de transfert” (usuellement notées $\underline{H}(\omega) = H(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi(\omega)}$) :

◊ les gains (complexes) en tension : $\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}$ et en courant : $\frac{\underline{I}_s}{\underline{I}_e}$;

◊ la transadmittance : $\frac{\underline{I}_s}{\underline{U}_e}$ et la transimpédance : $\frac{\underline{U}_s}{\underline{I}_e}$.

☞ remarque : en général, les fonctions de transfert dépendent des circuits auxquels est relié le quadripôle en entrée et en sortie !

◊ remarque : on peut utiliser les valeurs complexes efficaces, maximum ou instantanées (mais de même type au numérateur et au dénominateur).

3.2. Notations en décibels

• Le gain complexe $\underline{H}(\omega)$ peut être décrit par $H(\omega)$ et $\phi(\omega)$; les courbes correspondantes sont appelées “diagrammes de Bode”.

La pulsation ω et le gain réel $H(\omega)$ peuvent varier dans des proportions considérables, donc on utilise des échelles logarithmiques (comme pour le pH).

• D'une façon générale, on définit “l'unité bel” (symbole B) pour représenter une “unité de logarithme décimal” pour la puissance d’un signal.

De façon générale, la puissance est proportionnelle au carré de l’amplitude du signal, donc un gain d'un facteur 10^n en tension (ou en courant) correspond à un gain 10^{2n} en puissance ; ainsi une amplification d'un facteur $G = 10^3$ en tension correspond à un “gain en bels” : $G_{\mathrm{B}} = \log(G^2) = 2\ \log(G) = 6\ \mathrm{B}$.

On a ensuite pris l'habitude de compter en décibels (symbole dB) :

$$\boxed{G_{\mathrm{dB}} = 10\ \log(G^2) = 20\ \log(G)\ \ ;}$$

ainsi une amplification d'un facteur $G = 10^3$ correspond à : $G_{\mathrm{dB}} = 60\ \mathrm{dB}$.

◊ remarque : il faut faire attention à la manipulation des signes :

- ◊ un gain $\underline{H}(\omega) = -10$ correspond à $H_{\mathrm{dB}} = 20\ \mathrm{dB}$ et $\phi = \pi$ (le signe négatif ne peut pas être pris en compte ainsi dans le logarithme) ;
- ◊ au contraire, un gain $\underline{H}(\omega) = 0{,}1$ donne $H_{\mathrm{dB}} = -20\ \mathrm{dB}$ et $\phi = 0$ (le logarithme est négatif si $H(\omega) < 1$).

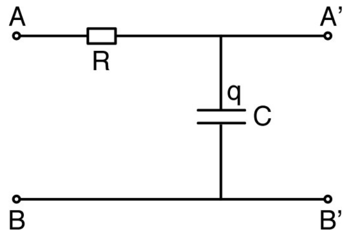
• Pour les fréquences, on utilise l'expression “décade” pour nommer une variation d'un facteur 10 , correspondant à une unité du logarithme décimal.

◊ remarque : une “octave” (variation d'un facteur 2 , utilisée pour la musique) correspond à $\approx 0{,}3$ décade.

◊ remarque : si l'abscisse affiche le logarithme, l'homogénéité des unités fait qu'on doit utiliser $\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$, avec une pulsation de référence ω_0 arbitraire.

3.3. Exemple du circuit “RC”

3.3.1. Sens “intégrateur” ; filtre “passe bas”



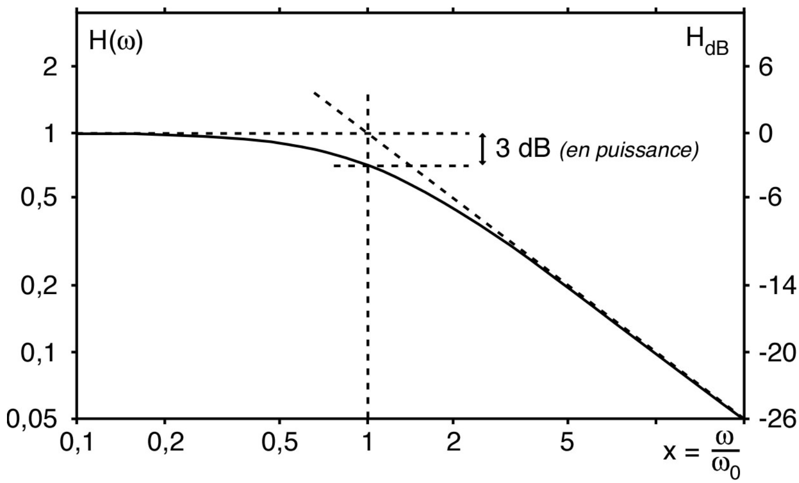
• On considère un circuit “RC” avec en sortie, aux bornes du condensateur, une charge “infinie” (sans effet puisque $\underline{i}_s \approx 0$).

Le courant est le même dans R et C, donc :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}_C}{R+\underline{Z}_C} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\,RC\omega}\ .$$

Ce montage est “suiveur” à basse fréquence et “intégrateur” à haute fréquence : $\underline{H}(\omega) \approx \frac{1}{\mathrm{j}\,RC\omega}$ si $\omega \gg \omega_0 = \frac{1}{RC}$ (l'intégration divise par $\mathrm{j}\,\omega$).

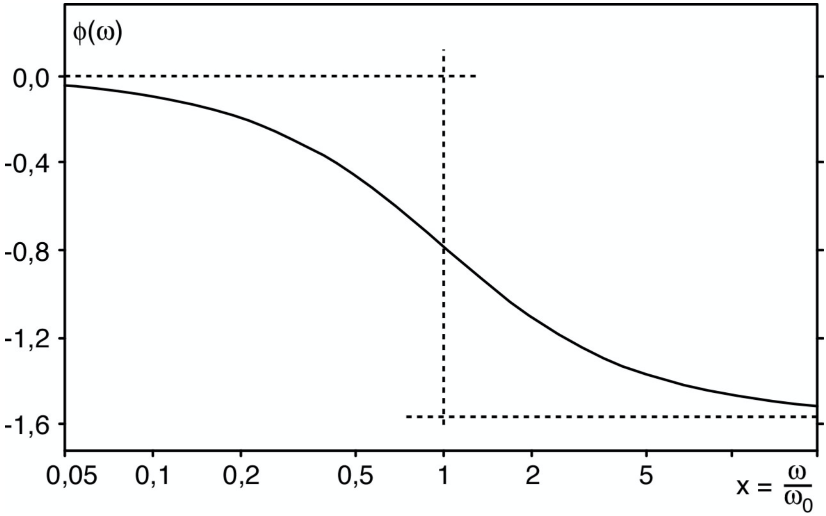
• On obtient pour $H(\omega)$ le diagramme suivant :



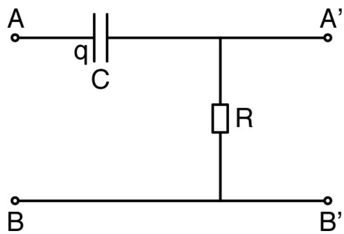
• L'ensemble des fréquences (ou des pulsations) pour lesquelles $H \geq \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$ est appelé “bande passante”.

Dans ce cas particulier, il n'y a qu'une “coupure supérieure” pour $\omega = \omega_0$.

• On obtient également pour le déphasage : $\phi = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$.



3.3.2. Sens “dérivateur” ; filtre “passe haut”

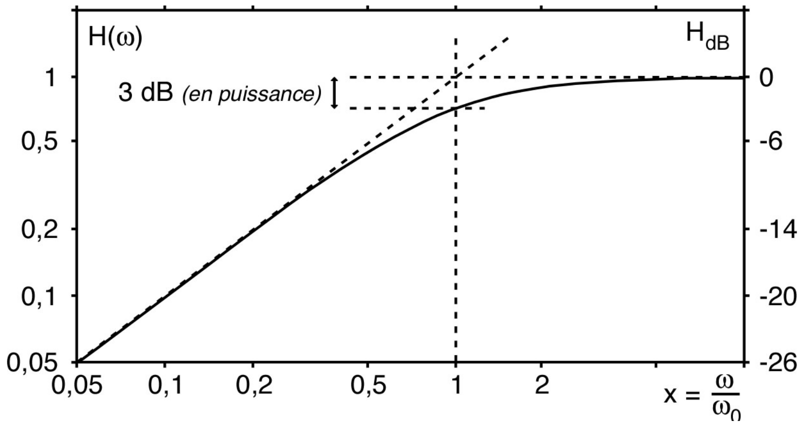


• De même, un circuit “RC” avec sortie, aux bornes du résistor, sur une charge “infinie” ($\underline{i}_s \approx 0$ donc la sortie n’intervient pas) :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{R}{R+\underline{Z}_C} = \frac{\mathrm{j}\,RC\omega}{1+\mathrm{j}\,RC\omega} .$$

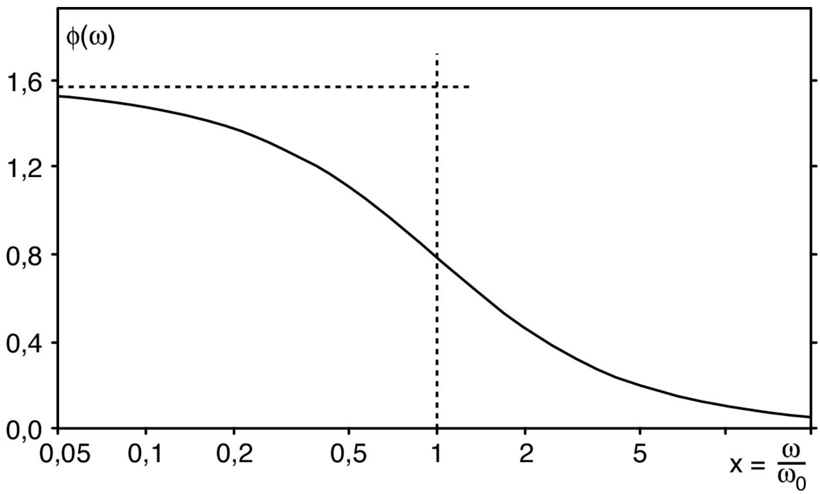
Ce montage est suiveur à haute fréquence et “dérivateur” à basse fréquence : $\underline{H}(\omega) \approx \mathrm{j}\,RC\omega$ si $\omega \ll \omega_0 = \frac{1}{RC}$ (la dérivation multiplie par $\mathrm{j}\,\omega$).

• Le diagramme de Bode pour le gain réel est le suivant :



• On peut délimiter une bande passante, qui dans ce <u>cas particulier</u> ne comporte qu'une “coupure inférieure” pour $\omega = \omega_0$.

• On obtient aussi pour le déphasage : $\phi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$.



📖 *exercices n° III, IV, V, VI et VII.*