

RÉGIME SINUSOÏDAL - QUADRIPÔLES - corrigé des exercices

A. EXERCICES DE BASE

I. Impédance itérative

- 1.a. • Pour que le courant débité par le générateur soit le même que s'il était branché sur R , il faut et il suffit que la résistance équivalente de l'ensemble soit R : $r_1 + \frac{R r_2}{R+r_2} = R$ donc $R = \frac{r_1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4 r_2}{r_1}} \right)$.
- 1.b. • Dans ces conditions : $U_1 = R I_1$ et $U_0 = R I_0$; par suite : $\frac{P_1}{P_0} = \left(\frac{U_1}{U_0} \right)^2 = \left(\frac{R-r_1}{R} \right)^2 = \left(\frac{r_2}{R+r_2} \right)^2$.
- 2.a. • Le raisonnement précédent peut s'appliquer par récurrence ; il suffit de considérer un seul élément "LC" du type indiqué. Le calcul est analogue en remplaçant r_1 par $\underline{Z}_1 = \frac{1}{j C \omega}$ et r_2 par $\underline{Z}_2 = r + j L \omega$; on obtient ainsi : $\underline{Z} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 L C \omega^2 + 4 j r C \omega}}{2 j C \omega}$.
- En constatant alors que le cas indiqué correspond à $4 L C \omega^2 = 1$, on obtient après simplification : $\underline{Z} = \frac{1 \pm (1+j) \sqrt{2 j r C \omega}}{2 j C \omega}$. On constate alors qu'il y a deux solutions complexes, mais une seule a un argument dans $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right]$, c'est-à-dire une partie réelle positive (réalisable à partir de résistances, d'inductances et de capacités) : $\underline{Z} = \frac{1+(1+j) \sqrt{2 j r C \omega}}{2 j C \omega} = \sqrt{\frac{r}{2 C \omega}} - j \frac{1+\sqrt{2 r C \omega}}{2 C \omega}$.
- 2.b. • Si on réalise cette impédance par un circuit avec r_0 et C_0 en série, d'impédance : $\underline{Z} = r_0 + \frac{1}{j C_0 \omega}$, cela correspond à : $r_0 = \sqrt{\frac{r}{2 C \omega}} = 35,4 \Omega$ et en reportant : $C_0 = \frac{2 C r_0}{r+r_0} = 11,7 \mu F$.

II. Adaptation d'impédances

1. • L'impédance complexe \underline{Z} de l'assemblage en parallèle de R' et C est telle que : $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R'} + j C \omega$ c'est-à-dire : $\underline{Z} = \frac{R'}{1+j R' C \omega}$. L'impédance de l'assemblage de R , L et \underline{Z} en série est alors : $\underline{Z}' = R + j L \omega + \underline{Z}$.
- Le courant débité par le générateur est par suite : $\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}'}$ et la tension aux bornes de \underline{Z} (tension commune à R' et C) est : $\underline{U} = \underline{Z} \underline{I} = \frac{\underline{E} \underline{Z}}{\underline{Z}'}$ $= \frac{\underline{E} R'}{R+R' \cdot (1-L C \omega^2) + j \omega \cdot (L+R R' C)}$.
- Compte tenu de $\underline{U} = R' \underline{I}'$, la puissance (moyenne) dissipée dans R' est alors :
- $$P = R' I'^2 = \frac{U^2}{R'} = \frac{|\underline{U}|^2}{R'} = \frac{E^2 R'}{(R+R' \cdot (1-L C \omega^2))^2 + \omega^2 \cdot (L+R R' C)^2}.$$
- La différentielle de P , pour R et R' fixées, peut s'écrire sous la forme : $dP = \frac{\partial P}{\partial L} dL + \frac{\partial P}{\partial C} dC$; la valeur maximum est obtenue quand la différentielle est nulle, c'est-à-dire quand $\frac{\partial P}{\partial L} = 0$ et $\frac{\partial P}{\partial C} = 0$. Ces conditions correspondent à : $L - R'^2 C \cdot (1 - L C \omega^2) = 0$ et $R^2 C - L \cdot (1 - L C \omega^2) = 0$.
- En régime sinusoïdal ($\omega \neq 0$) et pour $R' \geq R$ (l'égalité est acceptable) on obtient alors :
- $$C = \frac{1}{R' \omega} \sqrt{\frac{R'-R}{R}} \quad \text{et} \quad L = \frac{\sqrt{(R'-R) R}}{\omega}.$$
- ♦ remarque : en régime continu ($\omega = 0$) il semble que la solution soit : $R' = R = \sqrt{\frac{L}{C}}$, mais elle ne décrit pas correctement le problème (en courant continu, L et C sont sans effet ; la condition $R' = R$ est correcte, mais obtenue ici par hasard puisqu'elle ne peut découler logiquement que de la différentielle dP exprimée en fonction de dR et/ou dR').

- 2.a. • L'assemblage de C en parallèle avec l'ensemble de R' et L a une impédance complexe \underline{Z} telle que : $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R' + jL\omega} + jC\omega$ c'est-à-dire : $\underline{Z} = \frac{R' + jL\omega}{(1 - LC\omega^2) + jR'C\omega}$. L'impédance totale de l'assemblage de R et \underline{Z} en série est alors : $\underline{Z}' = R + \underline{Z}$.

• Le courant débité par le générateur est par suite : $\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}'}$ et la tension aux bornes de \underline{Z} (tension commune à C et à l'ensemble de R' et L) est : $\underline{U} = \underline{Z} \underline{I} = \frac{\underline{E} \underline{Z}}{\underline{Z}'} = \frac{\underline{E} \cdot (R' + jL\omega)}{R' + R + (1 - LC\omega^2) + j\omega \cdot (L + RR'C)}$.

• Le courant circulant dans R' (et L) est alors : $\underline{I}' = \frac{\underline{U}}{R' + jL\omega}$ et la tension aux bornes du résistor est donc : $\underline{U}' = R' \underline{I}' = \frac{\underline{U} R'}{R' + R + (1 - LC\omega^2) + j\omega \cdot (L + RR'C)}$. La puissance (moyenne) dissipée dans R' est par suite :

$$P = R' I'^2 = \frac{U'^2}{R'} = \frac{|\underline{U}'|^2}{R'} = \frac{E^2 R'}{(R' + R + (1 - LC\omega^2))^2 + \omega^2 (L + RR'C)^2}.$$

• Le calcul analogue à celui de la question (1) conduit aux conditions : $L - R^2 C \cdot (1 - LC\omega^2) = 0$ et $R'^2 C - L \cdot (1 - LC\omega^2) = 0$.

• En régime sinusoïdal ($\omega \neq 0$) et pour $R' \leq R$ (l'égalité est acceptable) on obtient alors :

$$C = \frac{1}{R \omega} \sqrt{\frac{R - R'}{R'}} \quad \text{et} \quad L = \frac{\sqrt{(R - R') R'}}{\omega}.$$

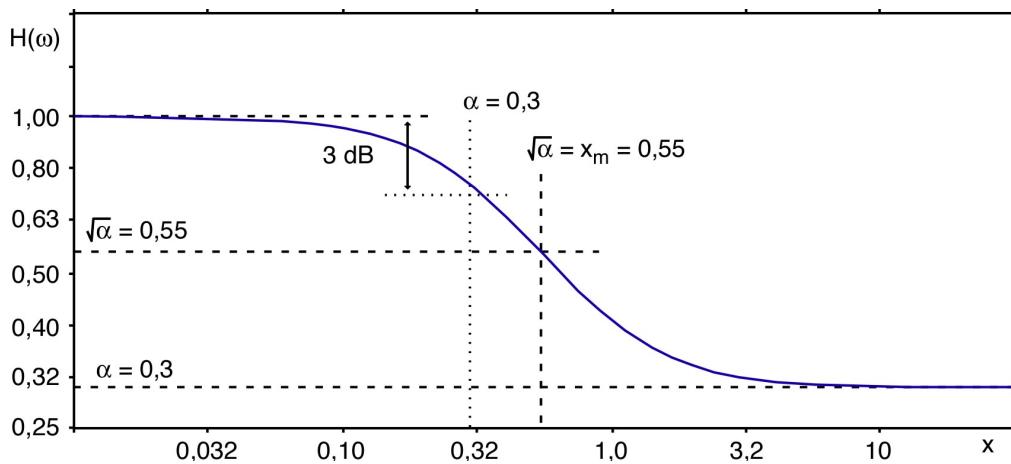
♦ remarque : en régime continu, la solution semble ici encore : $R' = R = \sqrt{\frac{L}{C}}$, mais de même elle ne décrit pas correctement le problème (il faut écrire dès le départ les équations avec $\omega = 0$).

- 2.b. • L'intérêt d'utiliser des éléments "réactifs" est qu'ils peuvent adapter la phase de \underline{Z} alors que les résistances ne peuvent adapter que le module Z .
 • L'avantage de n'utiliser que des éléments "réactifs" est qu'ils ne consomment pas d'énergie par eux mêmes (ils la stockent et la restituent alternativement). Par contre, ils conduisent tout de même à des pertes d'énergie par effet Joule dans R .

III. Fonction de transfert

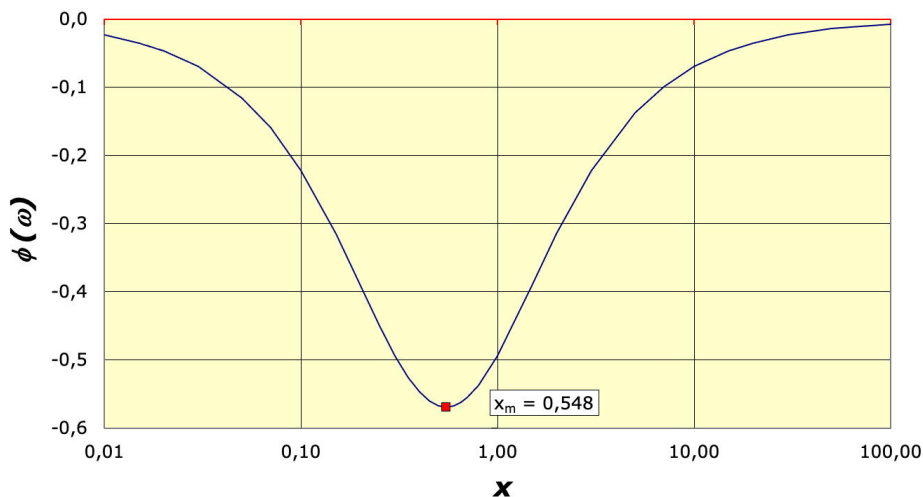
- Puisque $\underline{i}_s = 0$, c'est le même courant qui circule dans R , r et C : $\underline{i}_e = \frac{\underline{u}_e}{R + r + \frac{1}{jC\omega}}$. La tension de sortie, aux bornes de r et C , est alors : $\underline{u}_s = \left(r + \frac{1}{jC\omega}\right) \underline{i}_e$ et la fonction de transfert (gain en tension) est donc $\underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{r + \frac{1}{jC\omega}}{R + r + \frac{1}{jC\omega}}$.
- Pour exprimer \underline{H} en fonction de $\omega_0 = \frac{1}{rC}$, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $\alpha = \frac{r}{r+R}$ on peut écrire : $\underline{H} = \frac{1 + j \frac{x}{\alpha}}{1 + j \frac{x}{\alpha}}$; ceci peut aussi se mettre sous la forme : $\underline{H} = \frac{\alpha + x^2 + j(\alpha - 1)x}{\alpha(1 + \frac{x^2}{\alpha^2})}$.
- Ainsi : $H(\omega) = |\underline{H}| = \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 + \frac{x^2}{\alpha^2}}}$ et $\phi = \arg(\underline{H}) = \arctan\left(\frac{(\alpha - 1)x}{\alpha + x^2}\right)$.

- Le diagramme de Bode pour $H(\omega)$ est le suivant (en prenant par exemple $\alpha = 0,3$).



♦ remarque : ce diagramme de Bode présente un point d'inflexion : $H(\omega) = \sqrt{\alpha}$ pour $x = \sqrt{\alpha}$; par ailleurs, la fréquence de coupure à -3 dB correspond à : $x_c = \frac{\alpha}{\sqrt{1-2\alpha^2}}$ (inférieure à ω_0 pour $\alpha = 0,3$) et n'existe que si $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($H \rightarrow \alpha$ quand $\omega \rightarrow \infty$).

- Le diagramme de Bode pour $\phi(\omega)$ est le suivant (en prenant par exemple $\alpha = 0,3$).

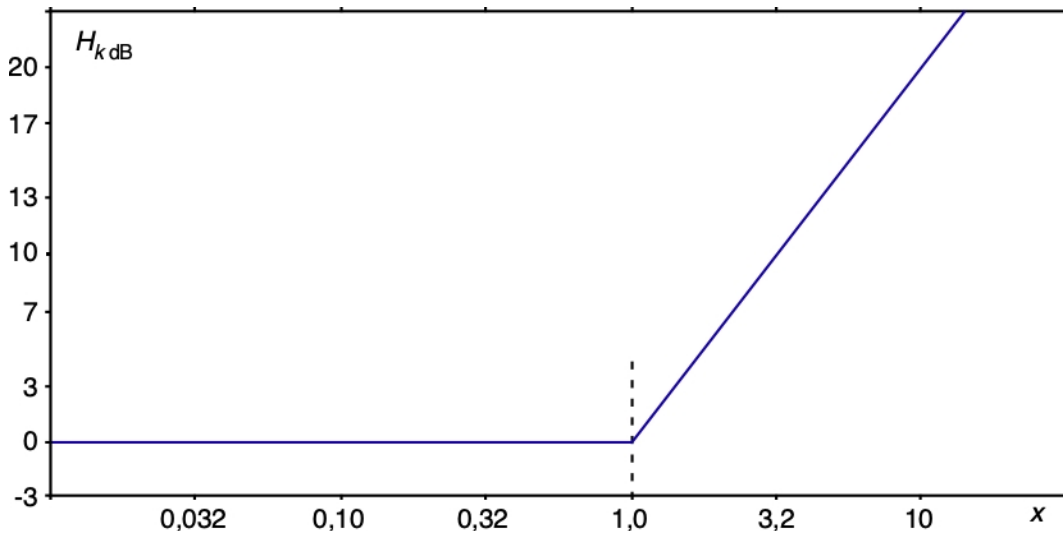


• La fonction “arctan” étant strictement monotone, dans l'intervalle de valeurs considéré, l'extremum de $\phi(\omega)$ (qui est un minimum) correspond à l'extremum de $\frac{x}{\alpha+x^2}$. On obtient alors $x_m = \sqrt{\alpha}$, d'où on déduit : $\phi_m = \arctan\left(\frac{\alpha-1}{2\sqrt{\alpha}}\right)$.

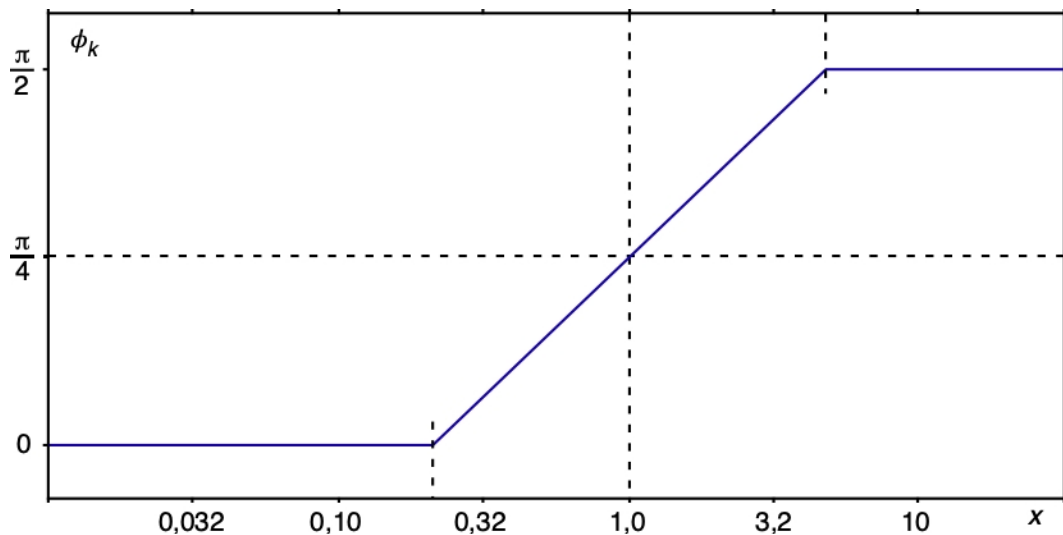
IV. Combinaison de fonctions de transfert

1. • Puisque $i_s = 0$, c'est le même courant qui circule dans R , r et C : $i_e = \frac{u_e}{R+r+\frac{1}{jC\omega}}$. La tension de sortie, aux bornes de r et C , est alors : $u_s = \left(r + \frac{1}{jC\omega}\right) i_e$ et la fonction de transfert (gain en tension) est donc $\underline{H} = \frac{u_s}{u_e} = \frac{r+\frac{1}{jC\omega}}{R+r+\frac{1}{jC\omega}}$.
2. • On peut écrire $\underline{H} = \frac{1+jrC\omega}{1+j(R+r)C\omega} = \frac{H_1}{H_2}$ avec $\underline{H}_1 = 1 + j\frac{\omega}{\omega_1}$ et $\underline{H}_2 = 1 + j\frac{\omega}{\omega_2}$.

- 3.a. • Pour simplifier on peut ici poser $x = x_k$ et $\underline{H}_k = 1 + jx$; les deux cas sont alors analogues.
 • Ainsi : $H_k(\omega) = |\underline{H}_k(\omega)| = \sqrt{1+x^2}$. Pour $x \approx 0$ le montage est suiveur : $H_k \approx 1$ et $H_{k\text{dB}} \approx 0$; pour $x \approx \infty$ le montage est dérivateur : $H_k \approx x$ et $H_{k\text{dB}} \approx 20 \log(x)$. Les deux asymptotes se coupent pour $x = 1$.

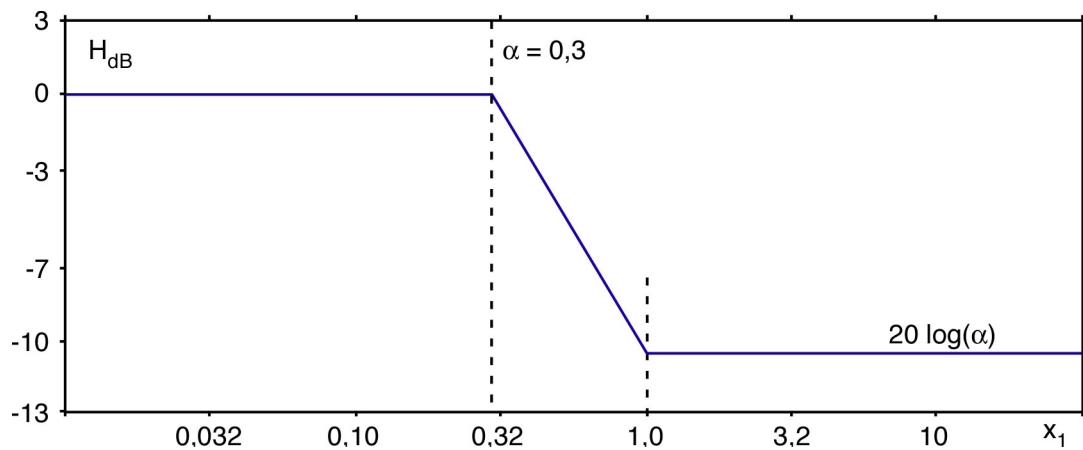


- 3.b. • On obtient ici : $\phi_k(\omega) = \arg(\underline{H}_k(\omega)) = \arctan(x)$. Pour $x \approx 0$ le montage est suiveur : $\phi_k \approx 0$; pour $x \approx \infty$ le montage est dérivateur : $\phi_k \approx \frac{\pi}{2}$.
 • Pour $x \approx 1$ on est ramené à étudier le développement limité par rapport à $\xi = \log(x) \approx 0$; ainsi : $\phi_k \approx \arctan(1) + \frac{d}{d\xi}(\arctan(10^\xi)) \xi \approx \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(10)}{2} \xi$. Ceci correspond à une droite coupant les asymptotes pour $\frac{\ln(10)}{2} \xi = \pm \frac{\pi}{4}$ donc pour $\xi = \log(x) = \pm \frac{\pi}{2} \log(e)$; $x = e^{\pm \pi/2}$.



- 4.a. • On peut écrire : $H(\omega) = \left| \frac{H_1}{H_2} \right|$ donc : $H_{\text{dB}} = 20 \log(H_1) - 20 \log(H_2) = H_{1\text{dB}} - H_{2\text{dB}}$.
 • Pour $\omega < \omega_2$ on obtient $H_{1\text{dB}} \approx H_{2\text{dB}} \approx 0$ donc $H_{\text{dB}} \approx 0$ (dans l'approximation asymptotique).
 • Pour $\omega_2 < \omega < \omega_1$ on obtient $H_{1\text{dB}} \approx 0$ et $H_{2\text{dB}} \approx 20 \log(x_2)$ avec $x_2 = \frac{x_1}{\alpha}$; ceci donne donc : $H_{\text{dB}} \approx 20 \log(\alpha) - 20 \log(x_1)$.
 • Pour $\omega_1 < \omega$ on obtient $H_{1\text{dB}} \approx 20 \log(x_1)$ et $H_{2\text{dB}} \approx 20 \log(x_2)$ donc : $H_{\text{dB}} \approx 20 \log(\alpha)$.

- Le diagramme de Bode simplifié pour $H(\omega)$ est donc le suivant.

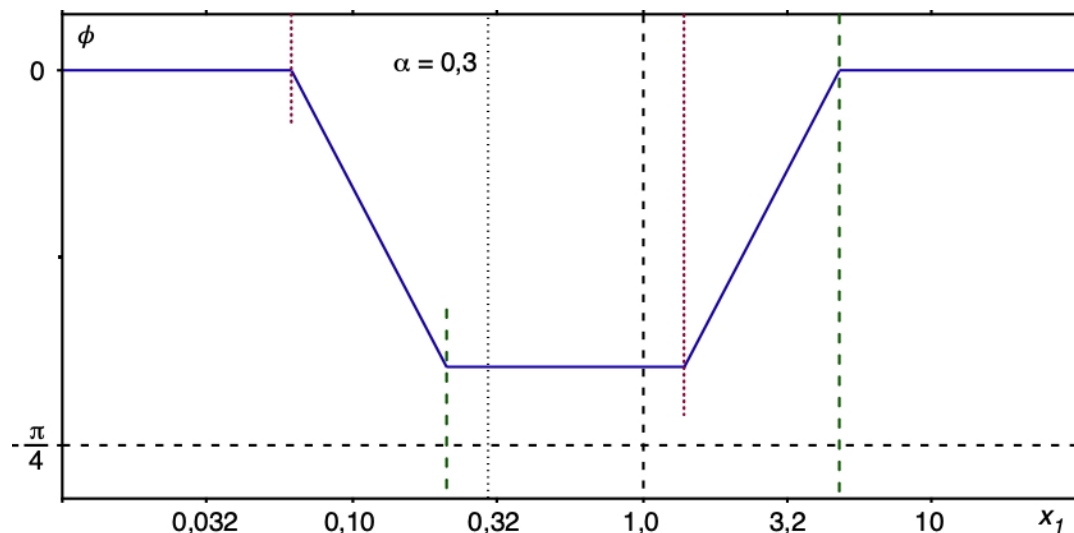


♦ remarque : ce diagramme de Bode présente un point d'inflexion : $H(\omega) = \sqrt{\alpha}$ pour $x_1 = \sqrt{\alpha}$; par contre, l'approximation au niveau de ce point d'inflexion est assez médiocre si α est trop proche de 1 , car la zone correspondante n'est pas dans les portions bien représentées par les asymptotes.

- 4.b. • De façon analogue $\phi = \arg(H) = \arg(H_1) - \arg(H_2) = \phi_1 - \phi_2$.

- Pour $\log(x_2) < -\frac{\pi}{2} \log(e)$ c'est-à-dire $\log(x_1) < \log(\alpha) - \frac{\pi}{2} \log(e)$ on obtient : $\phi_1 \approx \phi_2 \approx 0$ donc $\phi \approx 0$ (dans l'approximation asymptotique).
- Pour $-\frac{\pi}{2} \log(e) < \log(x_1) < \log(\alpha) + \frac{\pi}{2} \log(e)$ les variations affines analogues de ϕ_1 et ϕ_2 donnent une différence constante : $\phi \approx \frac{\ln(10)}{2} \log(\alpha) \approx -0,60 \text{ rad}$.
- Pour $\frac{\pi}{2} \log(e) < \log(x_1)$ on obtient $\phi_1 \approx \phi_2 \approx \frac{\pi}{2}$ donc : $\phi \approx 0$.
- Dans les deux zones intermédiaires, le raccordement se fait de façon affine.

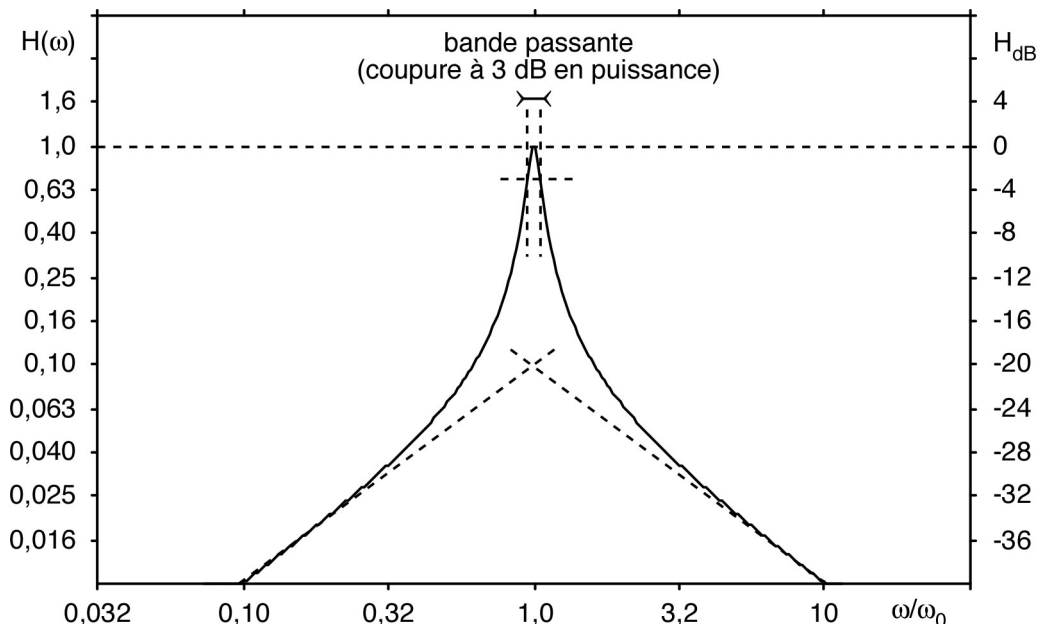
- Le diagramme de Bode simplifié pour $\phi(\omega)$ est donc le suivant.



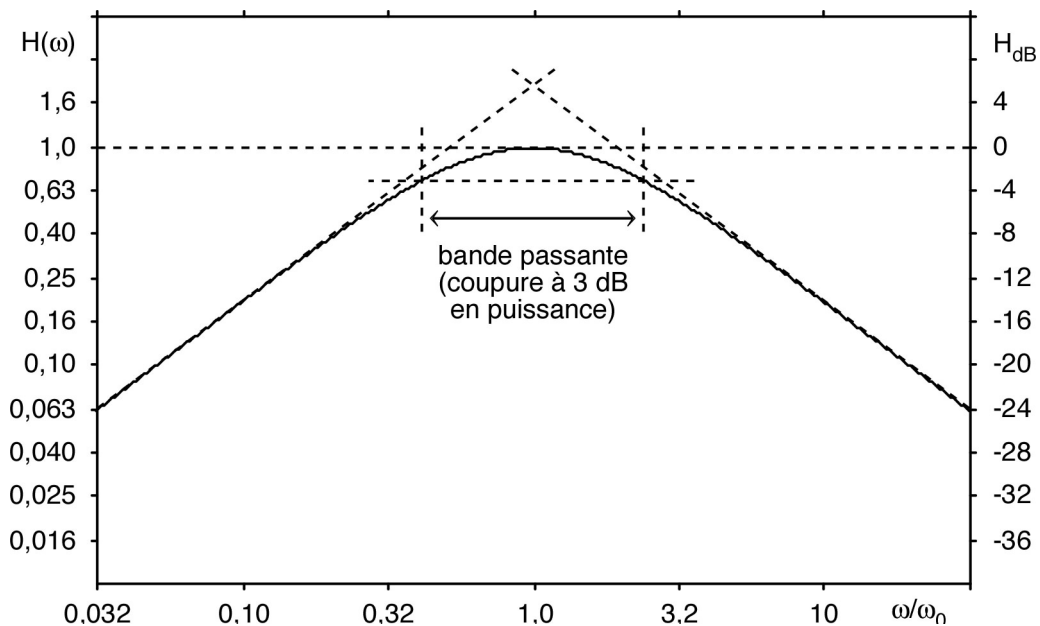
- 4.c. • La courbe réelle présente des “arrondis” au niveau des raccordements du diagramme simplifié. L'extremum de $\phi(\omega)$ (qui est un minimum) correspond par symétrie au milieu de l'intervalle “minimum” représenté ici : $\log(x_m) = \frac{\log(\alpha) + \log(1)}{2}$ donc $x_m = \sqrt{\alpha}$.
- D'après ce qui précède, le minimum est : $\phi_m \approx \frac{\ln(10)}{2} \log(\alpha) = \ln(\sqrt{\alpha})$; compte tenu des approximations, ce n'est a priori qu'un ordre de grandeur.

V. Circuit "RLC" et fonction de transfert

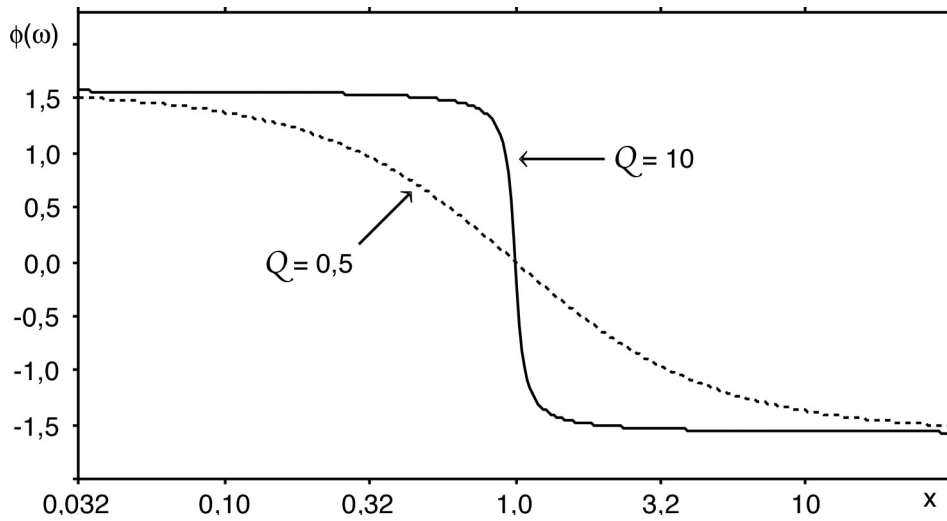
- Puisque $i_s = 0$, c'est le même courant qui circule dans R , L et C : $i_e = \frac{u_e}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$. La tension de sortie, aux bornes de R , est alors : $u_s = R i_e$ et la fonction de transfert (gain en tension) est par conséquent : $\underline{H} = \frac{u_s}{u_e} = \frac{R}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$.
- En fonction de $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$ on obtient : $\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$.
 - On en déduit : $H(\omega) = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}}$ et $\phi = \arg(\underline{H}) = -\arctan\left(Q(x - \frac{1}{x})\right)$.
 - Le diagramme de Bode pour $H(\omega)$ est le suivant pour $Q = 10$ (résonance aiguë).



- Le diagramme est le suivant pour $Q = 0,5$ (résonance large).



- Le diagramme de Bode pour $\phi(\omega)$ est le suivant (en prenant pour exemples $Q = 10$ et $Q = 0,5$).



- On peut écrire : $G_{dB} = 20 \log \left(\frac{H(\omega)}{H(\omega_0)} \right)$; ainsi en particulier : $G_{dB} \approx 20 \log \left(\frac{x}{Q} \right)$ pour $\omega \ll \omega_0$ et de même : $G_{dB} \approx 20 \log \left(\frac{1}{Qx} \right)$ pour $\omega \gg \omega_0$.
 - La bande passante à -3 dB en puissance est limitée par ω tel que $H(\omega) = \frac{H(\omega_0)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire $\omega^2 \pm \frac{\omega_0}{Q} - \omega_0^2 = 0$. Les solutions positives $\omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q} (\sqrt{1 + 4Q^2} - 1)$ et $\omega_2 = \frac{\omega_0}{2Q} (\sqrt{1 + 4Q^2} + 1)$ donnent la bande passante : $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$.

VI. Fonctions de transfert

- L'impédance complexe équivalente à l'ensemble de C et R_c peut s'écrire : $\underline{Z}_1 = \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{R_c}} = \frac{R_c}{1 + jR_c C\omega}$.
 - D'après le principe du pont diviseur de tension : $\underline{H}_u = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\underline{Z}_1}{R + \underline{Z}_1} = \frac{R_c}{R(1 + jR_c C\omega) + R_c}$.
- D'après le principe du pont diviseur de courant : $\underline{H}_i = \frac{\underline{i}_s}{\underline{i}_e} = \frac{G_c}{\underline{Y}_1} = \frac{\underline{Z}_1}{R_c} = \frac{1}{1 + jR_c C\omega}$.
- Le gain en puissance moyenne peut s'écrire : $H_P = \frac{P_s}{P_e} = \frac{U_s I_s \cos(\phi_s)}{U_e I_e \cos(\phi_e)} = H_u H_i \frac{\cos(\phi_s)}{\cos(\phi_e)}$.
 - Par ailleurs :

$$H_u = |\underline{H}_u| = \frac{R_c}{\sqrt{(R+R_c)^2 + (R R_c C\omega)^2}} ; H_i = |\underline{H}_i| = \frac{1}{\sqrt{1 + (R_c C\omega)^2}} ;$$

$$\underline{u}_s = R_c \underline{i}_s ; \cos(\phi_s) = \cos(\arg(R_c)) = 1 ;$$

$$\underline{u}_e = (R + \underline{Z}_1) \underline{i}_e ; \phi_e = \arg(R + \underline{Z}_1) = \arg \left(\frac{R(1 + jR_c C\omega) + R_c(1 - jR_c C\omega)}{1 + (R_c C\omega)^2} \right) ;$$

$$\cos(\phi_e) = \cos \left(\arg(R + R_c + jR_c C\omega \cdot (R - R_c)) \right) = \frac{R + R_c}{\sqrt{(R+R_c)^2 + (R_c C\omega)^2 (R - R_c)^2}} .$$
 - Finalement : $H_P = \frac{R_c}{R + R_c} \frac{\sqrt{(R+R_c)^2 + (R_c C\omega)^2 (R - R_c)^2}}{\sqrt{(R+R_c)^2 + (R R_c C\omega)^2} \sqrt{1 + (R_c C\omega)^2}} .$

VII. Filtre et fonction de transfert

- L'impédance complexe équivalente peut s'écrire : $\underline{Z}_e = jL\omega + \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{\underline{Z}_c + jL\omega}} = jL\omega + \frac{\underline{Z}_c + jL\omega}{1 + jC\omega(\underline{Z}_c + jL\omega)}$.
- La condition : $\underline{Z}_{it} = jL\omega + \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{\underline{Z}_{it} + jL\omega}}$ correspond à : $\underline{Z}_{it}^2 = \frac{2L}{C} - L^2\omega^2$ (valeur réelle).

• On constate que $\underline{Z}_{it}^2 = 0$ pour $\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{2}{LC}}$. De plus, on obtient ainsi : $\underline{Z}_{it}^2 > 0$ pour $\omega < \omega_1$, ce qui correspond à une impédance \underline{Z}_{it} réelle (purement résistive) ; on obtient de même : $\underline{Z}_{it}^2 < 0$ pour $\omega > \omega_1$, ce qui correspond à une impédance \underline{Z}_{it} imaginaire (purement réactive).

♦ remarque : on peut écrire ainsi : $\underline{Z}_{it} = L\sqrt{\omega_1^2 - \omega^2}$.

3. • La loi des mailles donne : $(\underline{Z}_c + j L\omega) \underline{i}_s = \frac{\underline{i}_e - \underline{i}_s}{j C\omega}$ d'où on déduit : $\underline{i}_e = \underline{i}_s \cdot [1 + j C\omega \cdot (\underline{Z}_c + j L\omega)]$. La fonction de transfert est : $\underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\underline{Z}_c \underline{i}_s}{\underline{Z}_e \underline{i}_e} = \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_c \cdot (1 - LC\omega^2) + j L\omega \cdot (2 - LC\omega^2)}$.

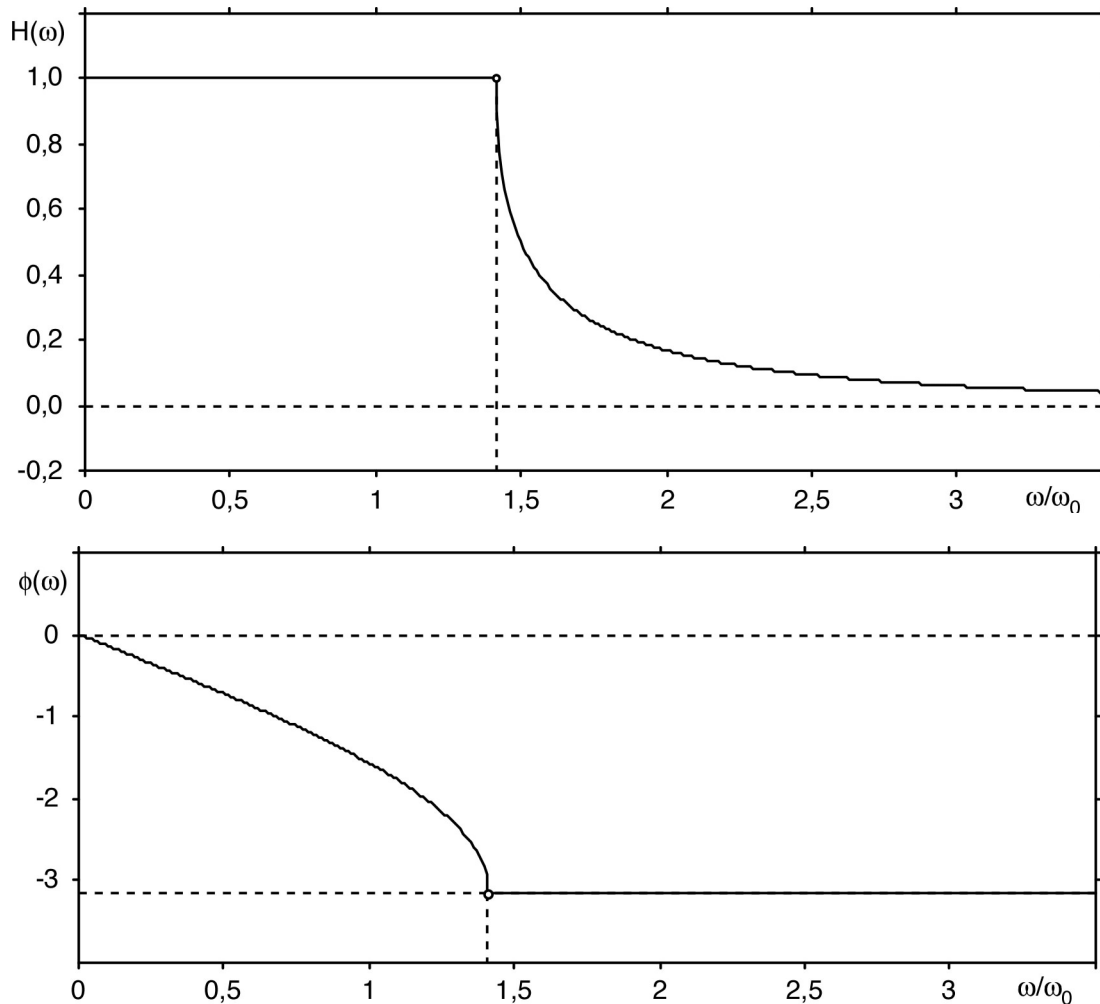
4. • Si on ajuste $\underline{Z}_c = \underline{Z}_{it}(\omega) = L\sqrt{\omega_1^2 - \omega^2} = \underline{Z}_e$ on obtient : $\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + j LC\omega \cdot \sqrt{\omega_1^2 - \omega^2}}$.

• En particulier pour $\omega < \omega_1$ on obtient :

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + L^2 C^2 \omega^2 \cdot (\omega_1^2 - \omega^2)}} = 1 ; \quad \phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega \sqrt{\omega_1^2 - \omega^2}}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

• De même, pour $\omega > \omega_1$: $H(\omega) = \frac{1}{LC\omega^2 - 1 + j LC\omega \cdot \sqrt{\omega^2 - \omega_1^2}}$ et $\phi(\omega) = \pi$ ($H(\omega)$ réel mais négatif).

• Ceci peut être résumé par les représentations graphiques suivantes.



B. EXERCICE D'APPROFONDISSEMENT

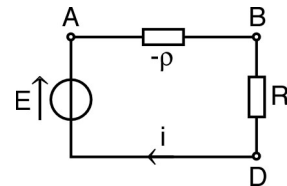
VIII. Diode tunnel ; auto-oscillation et amplification

- D'après le schéma, la tension aux bornes de la diode peut s'écrire : $U_{AB} = E - R I$; le "point de fonctionnement" sur le graphique correspond donc à l'intersection de la courbe caractéristique avec la droite d'équation : $I = \frac{E-U}{R}$. La valeur indiquée pour R donne une conductance $G = \frac{1}{R} \approx 6,9 \text{ mS}$ et la valeur de E est telle que la droite précédente est proche de celle représentée sur le graphique.
 - Inversement, la pente indiquée sur le graphique correspond à une résistance $-\rho$ avec $\rho = 150 \Omega$. Puisque le point de fonctionnement est au voisinage du point indiqué ($U_1 = 200 \text{ mV}$ et $I_1 = 0,5 \text{ mA}$) on peut alors obtenir le résultat par un calcul algébrique, en assimilant la portion "centrale" de la caractéristique avec la droite d'équation : $U_{AB} = U_1 - \rho \cdot (I - I_1)$. On obtient ainsi le point d'intersection pour $U_0 = U_1 = 200 \text{ mV}$ et $I_0 = I_1 = 0,5 \text{ mA}$.

- Soumis à une f.e.m. $E = E_0 + e \approx E_0$ le circuit est parcouru par un courant $I = I_0 + i \approx I_0$ et la tension aux bornes de la diode est donc : $U = E - R I = U_0 + (e - R i) \approx U_0$. Or, au voisinage de ce point de fonctionnement, la caractéristique peut être décrite par : $U = U_0 - \rho \cdot (I - I_0)$; la tension variable ajoutée de ce fait à U_0 est donc : $U - U_0 = -\rho i$, ce qui est caractéristique d'une résistance négative $-\rho$.

♦ remarque : le signe négatif ne provient pas d'un choix arbitraire du sens de mesure de la tension (elle est mesurée dans le même sens que celui qui donnerait une résistance positive pour un résistor) ; ce signe négatif est associé à la pente négative de la caractéristique (sur la portion considérée).

- Le montage peut ainsi être représenté (pour le régime variable) par le schéma ci-contre.



On obtient dans ces conditions : $u = R i$ et $e = (R - \rho) i$ donc : $\mathcal{A} = \frac{u}{e} = \frac{R}{R - \rho}$.

Si la résistance R est donnée, la seule façon de modifier \mathcal{A} est de changer ρ . Si la diode tunnel est donnée, on peut modifier ρ en utilisant un autre point de fonctionnement sur la caractéristique, c'est-à-dire en imposant E_0 différent (et donc U_0 et I_0 différents) pour se placer en un point de la caractéristique dont la pente est différente.

- On obtient dans ces conditions : $\underline{u} = R \underline{i}$ et $\underline{e} = (R + j L \omega - \frac{\rho}{1 - j \rho C \omega}) \underline{i}$; par conséquent :

$$\underline{\mathcal{A}} = \frac{\underline{u}}{\underline{e}} = \frac{R}{R + j L \omega - \frac{\rho}{1 - j \rho C \omega}} = \frac{R \cdot (1 - j \rho C \omega)}{R - \rho \cdot (1 - L C \omega^2) + j \omega \cdot (L - \rho R C)}.$$

L'argument de $\underline{\mathcal{A}}$ correspond au déphasage de u par rapport à e : $\mathcal{A} = \mathcal{A} e^{j\phi} = \frac{U_m e^{j\phi'}}{E_m e^{j\phi''}}$ (où U_m et E_m désignent les amplitudes des variations u et e) correspond à $\phi = \phi' - \phi''$.

- Le module $\mathcal{A}(\omega)$ est infini si et seulement si le dénominateur est nul, donc : $R - \rho \cdot (1 - L C \omega^2) = 0$ et $L - \rho R C = 0$. Ceci donne : $R_c = \frac{L}{\rho C}$ et $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L C}}$ (pulsation propre du circuit "LC") et $\alpha = -\frac{1}{\rho C}$ (inverse de la constante de temps caractéristique de "l'amortissement" par le circuit "pC" ; dans ces conditions d'ailleurs identique, au signe près, à la constante de temps du circuit "R_cL").

♦ remarque : ceci suppose $|\alpha| < \omega_0$ (amortissement relativement faible).

En fait, dans ces conditions, le circuit "pC" ne réalise pas un "amortissement" mais une amplification ; le gain obtenu est infini car l'amortissement causé par "R_cL" est exactement compensé par l'amplification causée par "pC". Par suite, le circuit total reçoit de l'énergie (fournie par le générateur) qui n'est pas dissipée, donc l'accumulation de cette énergie fait tendre l'amplitude du signal vers l'infini.

• Dans la mesure où les calculs précédents ne considèrent que le régime sinusoïdal asymptotique (après “amortissement” du régime transitoire), ce régime asymptotique correspond forcément à une amplitude infinie.

♦ remarque : si on changeait R pour lui donner la valeur R_c il faudrait aussi changer E_0 si on voulait conserver le même point de fonctionnement (d’où découle ρ).

6.a. • On peut écrire : $\mathcal{A}^2 = \frac{R^2 \cdot (1 + (\rho C \omega)^2)}{(R - \rho \cdot (1 - LC \omega^2))^2 + \omega^2 \cdot (L - \rho RC)^2}$.

• Pour $\omega \rightarrow 0$ on obtient $\omega \ll |\alpha| = \frac{1}{\rho C} = 1,33 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ donc $\omega \ll \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1,83 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$; on

peut donc écrire : $\mathcal{A}^2 \approx \frac{R^2}{(R - \rho)^2 + \omega^2 \cdot (L - \rho RC)^2}$.

• En particulier, tant que ω n’est pas trop grand, on obtient : $\mathcal{A} \approx \mathcal{A}(0) = \frac{R}{|R - \rho|} = 29 > 1$; cette valeur est d’ailleurs la valeur maximum \mathcal{A}_{max} .

♦ remarque : il est normal de retrouver ici l’expression obtenue en négligeant L et C , puisqu’à faible fréquence l’impédance de L est négligeable et que celle de C est quasi-infinie (imposant ainsi le passage du courant dans $-\rho$).

6.b. • Compte tenu du domaine de validité de l’approximation précédente (indiquée en pointillés sur le graphique ci-après), la bande passante peut être calculée avec l’expression simplifiée.

• La limite (supérieure) de la bande passante correspond à : $(R - \rho)^2 + \omega_1^2 \cdot (L - \rho RC)^2 = 2(R - \rho)^2$ c’est-à-dire : $\Delta\omega = \omega_1 = \frac{|R - \rho|}{|L - \rho RC|} = 46,2 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$.

