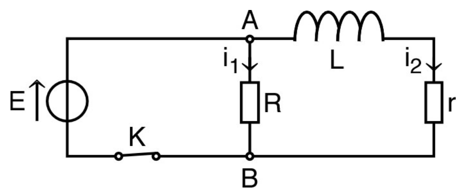
RÉGIMES TRANSITOIRES - CIRCUITS RL ET RC - corrigé des exercices

A. EXERCICES DE BASE

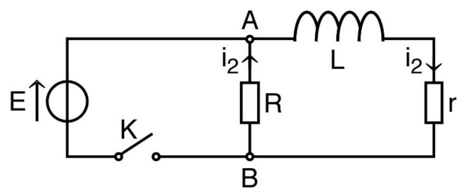
I. Établissement et rupture d'un courant

1. • Lorsqu'on ferme l'interrupteur, il apparaît des courants i_1 et i_2 tels que : $E = R\,i_1 = r\,i_2 + L\,\frac{di_2}{dt}$.



• La première relation donne $i_1 = \frac{E}{R}$. La seconde peut s'écrire $\frac{di_2}{dt} + \frac{r}{L}\,i_2 = \frac{E}{L}$; les solutions sont de la forme : $i_2 = \frac{E}{r} + A\,\mathrm{e}^{-t/\tau_2}$ avec $\tau_2 = \frac{L}{r}$; les conditions initiales (courant raisonnablement nul) imposent : $i_2 = \frac{E}{r}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_2}\right)$.

2. • Après un temps assez long $(t \gg \tau_2)$, on peut supposer que la limite est atteinte : $i_2 \approx \frac{E}{r}$; on ouvre alors l'interrupteur :



• Les courants i_1 et i_2 sont alors tels que : $i_1 = -i_2$ et $u_{AB} = -R\,i_2 = r\,i_2 + L\,\frac{di_2}{dt}$. Cette équation peut s'écrire $\frac{di_2}{dt} + \frac{r+R}{L}\,i_2 = 0$; les solutions sont de la forme : $i_2 = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1}$ avec $\tau_1 = \frac{L}{r+R}$; les conditions initiales imposent : $i_2 = \frac{E}{r}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1}$.

• On en déduit la tension : $u_{AB} = -R\,i_2 = -\frac{R}{r}\,E\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1}$. Cette tension est d'autant plus rapidement décroissante que la résistance R est grande, dans la mesure où $\tau_1 = \frac{L}{r+R}$ est d'autant plus petit ; mais la valeur initiale : $u_{AB}(0) = -\frac{R}{r}\,E$ peut être alors très supérieure à E si $R \gg r$.

II. Associations d'inductances ou de capacités

1. • La loi caractéristique d'une inductance peut s'écrire : $u = L\,\frac{di}{dt}$. Pour un assemblage de deux inductances en série, donc parcourues par le même courant, l'addition des tensions correspond à :

$$u = u_1 + u_2 = L_1\,\frac{di}{dt} + L_2\,\frac{di}{dt} = (L_1 + L_2)\,\frac{di}{dt}.$$

• L'assemblage se comporte donc comme une inductance $L_1 + L_2$.

2. • La loi caractéristique d'une capacité peut s'écrire : $i = C\,\frac{du}{dt}$. Pour un assemblage de deux capacités en parallèle, donc soumises à une même tension, l'addition des courants correspond à :

$$i = i_1 + i_2 = C_1\,\frac{du}{dt} + C_2\,\frac{du}{dt} = (C_1 + C_2)\,\frac{du}{dt}.$$

• L'assemblage se comporte donc comme une inductance $C_1 + C_2$.

III. Réponse à un échelon de courant

1.a. • La loi des nœuds impose : $i_c = i + i'$.

1.b. • La loi des mailles impose : $R\, i' = L\, \frac{di}{dt}$.

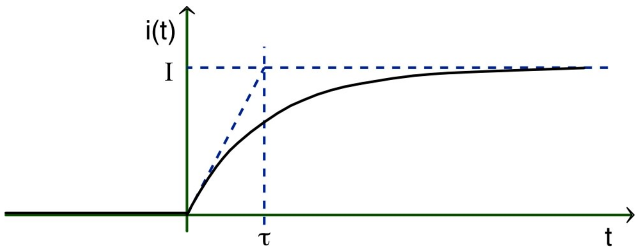
• La combinaison des équations précédentes donne : $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}\, i = \frac{R}{L}\, i_c$.

• Puisque l'énoncé n'indique aucune manipulation ayant pu faire apparaître un courant dans le circuit pour $t < 0$, le courant y est normalement nul (il n'y a que des dipôles récepteurs).

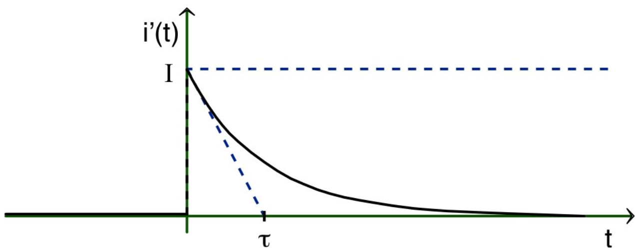
1.c. • Pour $t < 0$, la solution de l'équation différentielle est de la forme : $i = A\, \mathrm{e}^{-t/\tau}$ avec une constante de temps : $\tau = \frac{L}{R}$. La situation étant invariante pour tout $t < 0$, la seule solution possible est : $i = 0$. On en déduit par conséquent : $i' = \frac{L}{R}\, \frac{dq}{dt} = 0$.

• Pour $t \geq 0$, la solution de l'équation différentielle est de la forme : $i = I + A\, \mathrm{e}^{-t/\tau}$ et les conditions initiales imposent : $i = I.\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$. On en déduit alors : $i' = \frac{L}{R}\, \frac{dq}{dt} = I\, \mathrm{e}^{-t/\tau}$.

1.d. • L'allure des variations du courant i est la suivante :



• L'allure des variations du courant $i' = \frac{L}{R}\, \frac{dq}{dt}$ est la suivante :



2.a. • La loi des nœuds impose : $i_c = i + i'$.

• La loi des mailles impose : $R\, i' = \frac{q}{C}$.

• La charge du condensateur impose : $i = \frac{dq}{dt}$.

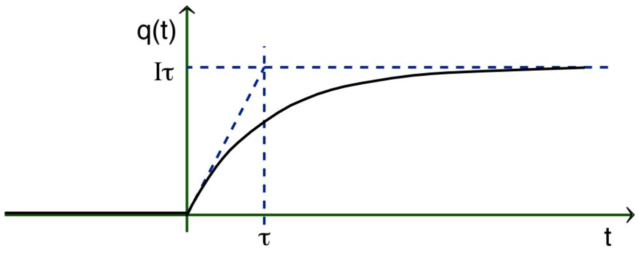
2.b. • La combinaison des équations précédentes donne : $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{R\,C} = i_c$. Pour $t < 0$, cela correspond à : $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{R\,C} = 0$; pour $t \geq 0$, cela correspond à : $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{R\,C} = I$.

• Puisque l'énoncé n'indique aucune manipulation ayant pu faire apparaître une charge du condensateur pour $t < 0$, la charge y est normalement nulle (il n'y a que des dipôles récepteurs).

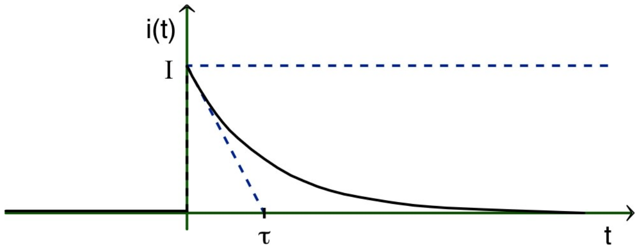
2.c. • Pour $t < 0$, la solution de l'équation différentielle est de la forme : $q = A\, \mathrm{e}^{-t/\tau}$ avec une constante de temps : $\tau = R\,C$. La situation étant invariante pour tout $t < 0$, la seule solution possible est : $q = 0$. On en déduit par conséquent : $i' = \frac{q}{\tau} = 0$ et $i = \frac{dq}{dt} = 0$.

• Pour $t \geq 0$, la solution de l'équation différentielle est de la forme : $q = I\,\tau + A\, \mathrm{e}^{-t/\tau}$ et les conditions initiales imposent : $q = I\,\tau\,.\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$. On en déduit : $i' = \frac{q}{\tau} = I\,.\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ et $i = \frac{dq}{dt} = I\, \mathrm{e}^{-t/\tau}$.

2.d. • L'allure des variations de la charge q est la suivante (et les variations de $i' = \frac{q}{\tau}$ sont semblables, à un coefficient de proportionnalité près).



• L'allure des variations du courant $i = \frac{dq}{dt}$ est la suivante.



IV. Réponse à une “impulsion” de tension

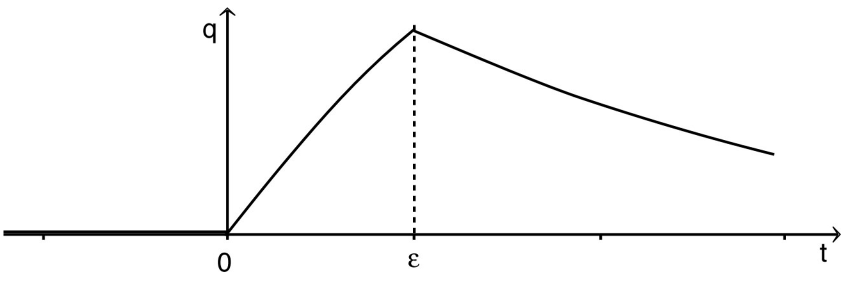
1.a. • Pour considérer le signal comme une impulsion de tension, il faut : $\varepsilon \ll \tau$ où $\tau = R\,C$ est la constante de temps caractéristique du circuit RC.

1.b. • Pour $t < 0$, la loi des mailles $R\,i + \frac{q}{C} = 0$ donne l'équation différentielle : $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{R\,C} = 0$. L'invariance du système pour tout $t < 0$ correspond à : $q = 0$ et $i = 0$.

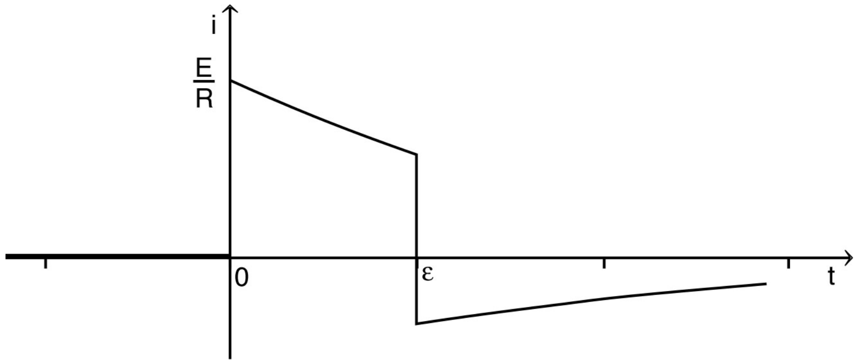
• Pour $0 \leq t \leq \varepsilon$, l'équation différentielle s'écrit : $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{R\,C} = \frac{E}{R}$. Les solutions sont de la forme : $q = C\,E + A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ et les conditions initiales imposent : $q = C\,E\,.\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$. Ainsi : $i = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

• Pour $t > \varepsilon$, l'équation différentielle : $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{R\,C} = 0$ a des solutions de la forme : $q = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ et les conditions initiales imposent : $q = C\,E\,.\left(\mathrm{e}^{\varepsilon/\tau} - 1\right)\mathrm{e}^{-t/\tau}$. Ainsi : $i = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R}\,.\left(1 - \mathrm{e}^{\varepsilon/\tau}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

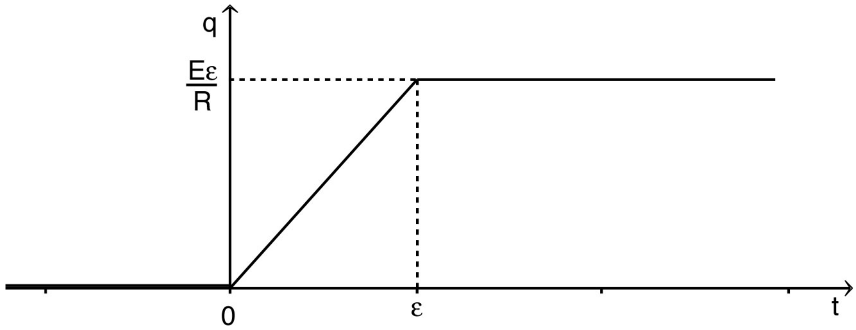
• L'allure des variations de la charge est la suivante.



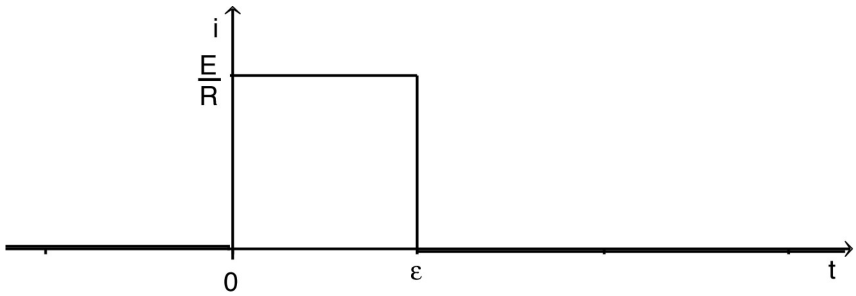
• L'allure des variations du courant est la suivante.



1.c. • Pour $0 \leq t \leq \varepsilon$, la limite $\varepsilon \ll \tau$ correspond à : $q \approx \frac{E}{R}\,t$ et $i \approx \frac{E}{R}$.
• Pour $t > \varepsilon$, la limite $\varepsilon \ll \tau$ correspond à : $q \approx \frac{E\,\varepsilon}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \approx \frac{E\,\varepsilon}{R}$ sur des durées d'un l'ordre de grandeur nettement inférieur à τ ; par suite : $i \approx -\frac{E\,\varepsilon}{R\,\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \approx 0$ ($|i| \ll \frac{E}{R}$).
• L'allure des variations de la charge est la suivante.



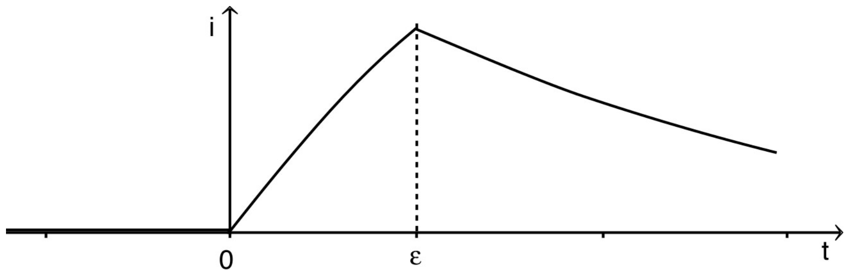
• L'allure des variations du courant est la suivante.



2.a. • Pour considérer le signal comme une impulsion de tension, il faut : $\varepsilon \ll \tau$ où $\tau = \frac{L}{R}$ est la constante de temps caractéristique du circuit RL.

2.b. • Pour $t < 0$, la loi des mailles conduit à l'équation différentielle : $R\,i + L\,\frac{di}{dt} = 0$. L'invariance du système pour tout $t < 0$ correspond à : $i = 0$.
• Pour $0 \leq t \leq \varepsilon$, l'équation différentielle : $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}\,i = \frac{E}{L}$ a pour solutions : $i = \frac{E}{R} + A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ et les conditions initiales imposent : $i = \frac{E}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$.
• Pour $t > \varepsilon$, l'équation différentielle s'écrit : $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}\,i = 0$. Les solutions sont de la forme : $i = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ et les conditions initiales imposent : $i = \frac{E}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{\varepsilon/\tau}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

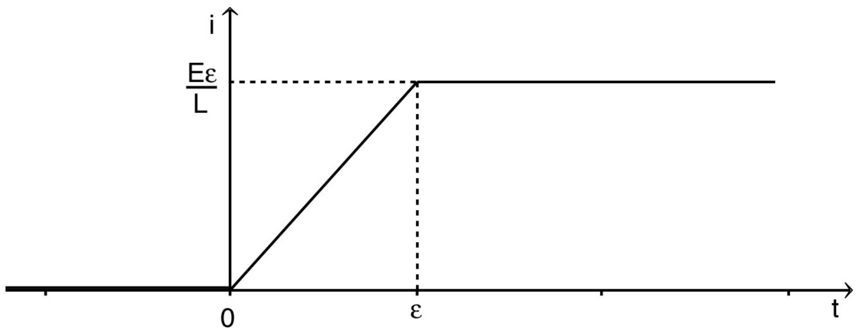
• L'allure des variations du courant est la suivante.



2.c. • Pour $0 \leq t \leq \varepsilon$, la limite $\varepsilon \ll \tau$ correspond à : $i \approx \frac{E}{L}\, t$.

• Pour $t > \varepsilon$, la limite $\varepsilon \ll \tau$ donne : $i \approx \frac{E\,\varepsilon}{L}\ \mathrm{e}^{-t/\tau} \approx \frac{E\,\varepsilon}{L}$ pour des durées nettement inférieures à τ.

• L'allure des variations du courant est la suivante.



V. Réponse à une "impulsion" de courant

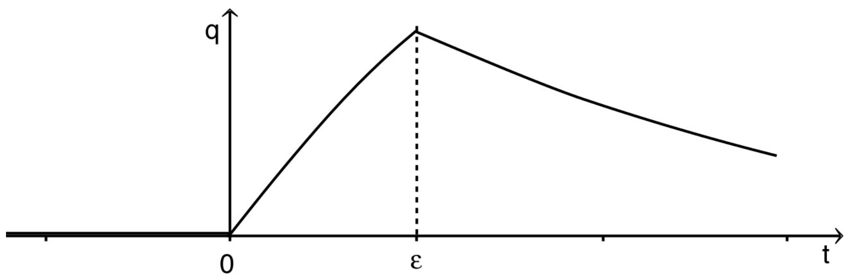
1.a. • Pour considérer le signal comme une impulsion de courant, il faut : $\varepsilon \ll \tau$ où $\tau = R\,C$ est la constante de temps caractéristique du circuit RC.

1.b. • Pour $t < 0$, $I_c = 0$ implique $i' = -i$ et la loi des mailles $R\,i + \frac{q}{C} = 0$ donne l'équation différentielle : $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{R\,C} = 0$. L'invariance du système pour tout $t < 0$ correspond à : $q = 0$ et $i = 0$.

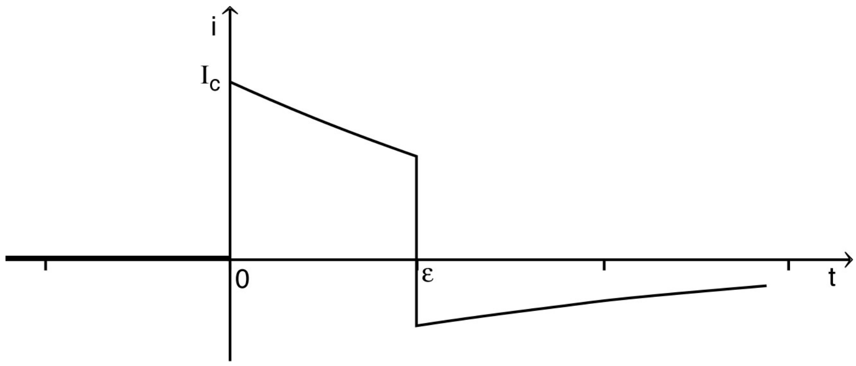
• Pour $0 \leq t \leq \varepsilon$, la loi des nœuds donne $I_c = i + i'$ avec $i = \frac{dq}{dt}$ et $R\,i' = \frac{q}{C}$; l'équation différentielle s'écrit donc : $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{R\,C} = I_c$. Les solutions sont de la forme : $q = R\,C\,I_c + A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ et les conditions initiales imposent : $q = R\,C\,I_c\,.\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$. On en déduit alors : $i = \frac{dq}{dt} = I_c\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

• Pour $t > \varepsilon$, l'équation différentielle : $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{R\,C} = 0$ a des solutions de la forme : $q = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ et les conditions initiales imposent : $q = R\,C\,I_c\,.\left(\mathrm{e}^{\varepsilon/\tau} - 1\right)\mathrm{e}^{-t/\tau}$. On en déduit : $i = \frac{dq}{dt} = I_c\,.\left(1 - \mathrm{e}^{\varepsilon/\tau}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

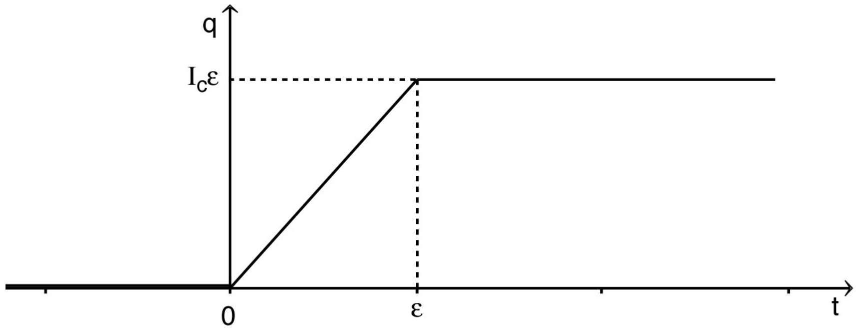
• L'allure des variations de la charge est la suivante.



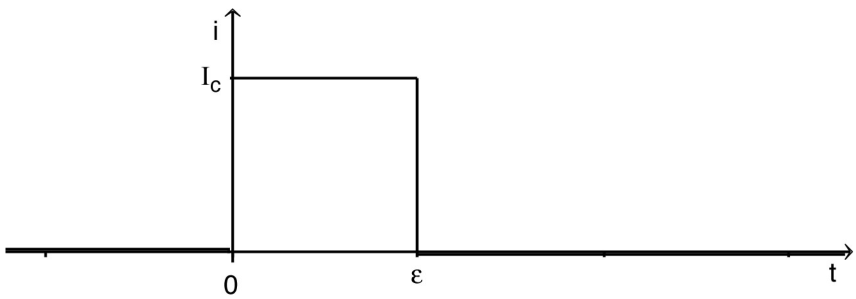
• L'allure des variations du courant est la suivante.



1.c. • Pour $0 \leq t \leq \varepsilon$, la limite $\varepsilon \ll \tau$ correspond à : $q \approx I_c\, t$ et $i \approx I_c$.
• Pour $t > \varepsilon$, la limite $\varepsilon \ll \tau$ correspond à : $q \approx I_c\, \varepsilon\, \mathrm{e}^{-t/\tau} \approx I_c\, \varepsilon$ sur des durées d'un l'ordre de grandeur nettement inférieur à τ ; par suite : $i \approx -\frac{I_c\, \varepsilon}{\tau}\, \mathrm{e}^{-t/\tau}$ ($|i| \ll I_c$).
• L'allure des variations de la charge est la suivante.



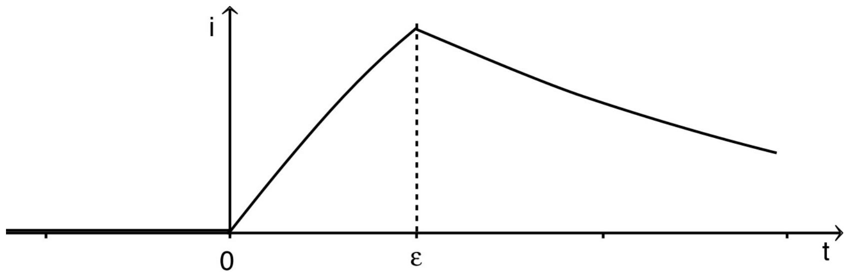
• L'allure des variations du courant est la suivante.



2.a. • Pour considérer le signal comme une impulsion de courant, il faut : $\varepsilon \ll \tau$ où $\tau = \frac{L}{R}$ est la constante de temps caractéristique du circuit RL.

2.b. • Pour $t < 0$, $I_c = 0$ implique $i' = -i$ et la loi des mailles conduit à l'équation différentielle : $R\, i + L\frac{di}{dt} = 0$. L'invariance du système pour tout $t < 0$ correspond à : $i = 0$.
• Pour $0 \leq t \leq \varepsilon$, la loi des nœuds donne $I_c = i + i'$ avec $R\, i' = L\, \frac{di}{dt}$; l'équation différentielle s'écrit donc : $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}\, i = \frac{R}{L}\, I_c$. Les solutions sont de la forme : $i = I_c + A\, \mathrm{e}^{-t/\tau}$ et les conditions initiales imposent : $i = I_c . \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$.
• Pour $t > \varepsilon$, l'équation différentielle s'écrit : $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}\, i = 0$. Les solutions sont de la forme : $i = A\, \mathrm{e}^{-t/\tau}$ et les conditions initiales imposent : $i = I_c . \left(1 - \mathrm{e}^{\varepsilon/\tau}\right) \mathrm{e}^{-t/\tau}$.

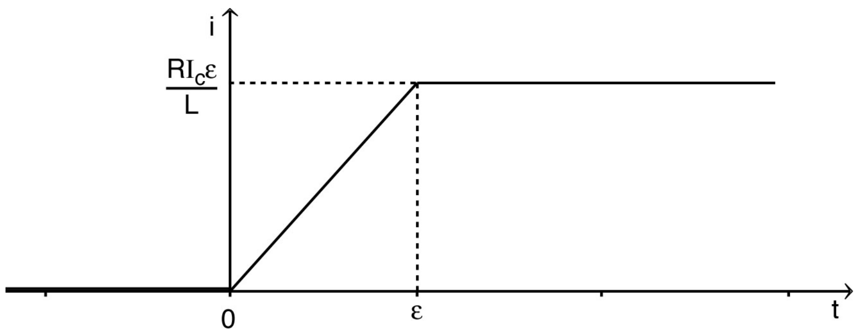
• L'allure des variations du courant est la suivante.



2.c. • Pour $0 \leq t \leq \varepsilon$, la limite $\varepsilon \ll \tau$ correspond à : $i \approx \frac{R\,I_c}{L}\,t$.

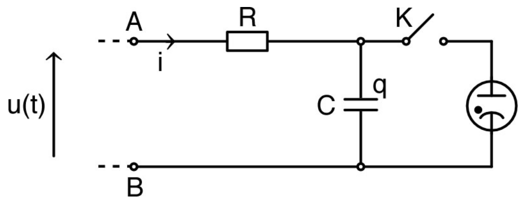
• Pour $t > \varepsilon$, la limite $\varepsilon \ll \tau$ correspond à : $i = \frac{R\,I_c\,\varepsilon}{L}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \approx \frac{R\,I_c\,\varepsilon}{L}$ sur des durées d'un l'ordre de grandeur nettement inférieur à τ.

• L'allure des variations du courant est la suivante.



VI. Oscillations de relaxation d'un tube à gaz

1. • On peut considérer : $u = R\,i + v$ avec $i = \frac{dq}{dt}$ et $v = \frac{q}{C}$; donc : $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = \frac{u}{R}$.



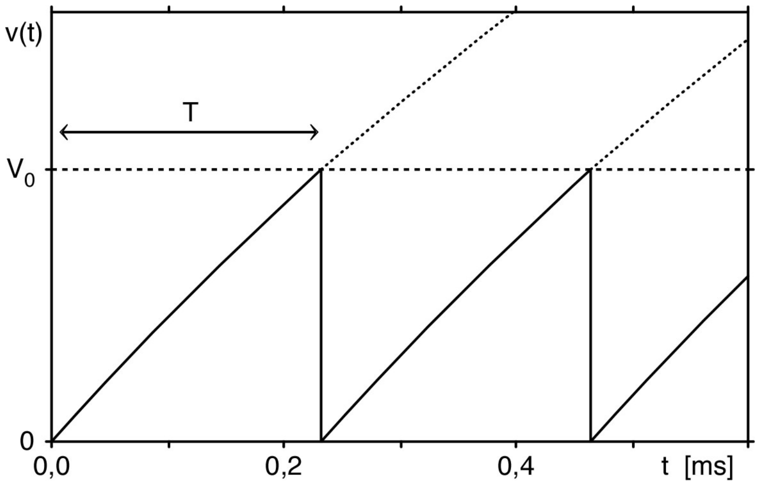
• Pour $t < 0$: $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$ et l'invariance du système conduit à $q = 0$.

• Pour $t \geq 0$: $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \frac{E}{R}$ et on obtient : $q = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + C\,E$ où les conditions initiales donnent : $A = -C\,E$; par suite : $q = C\,E\,.\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ et $v = \frac{q}{C} = E\,.\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$.

2. • Si l'interrupteur est fermé, le comportement initial est le même tant que $v < V_0$ (le tube à gaz se comporte alors comme un interrupteur ouvert).

• À l'instant $T = -\tau\,\ln\left(1 - \frac{V_0}{E}\right)$ où $V_0 = E\,.\left(1 - \mathrm{e}^{-T/\tau}\right)$, le condensateur est "instantanément" déchargé, donc v s'annule et le tube à gaz redevient "bloqué" ; ainsi la charge reprend comme initialement.

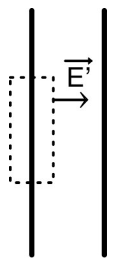
• Ce phénomène se reproduit donc périodiquement, avec une fréquence $f = \frac{1}{T} = \frac{-1}{\tau\,\ln\left(1 - \frac{V_0}{E}\right)} = 4280\ \mathrm{Hz}$.



B. EXERCICE D'APPROFONDISSEMENT

VII. Bilan énergétique d'un régime transitoire

1. • On considère que le champ électrique, noté $\vec{E'}$, est uniforme dans le condensateur plan et nul à l'extérieur. Le théorème de Gauss, appliqué à un cylindre d'axe parallèle au champ, “à cheval” sur une des plaques, conduit à la relation : $\Phi = S\,E' = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\,S}{\varepsilon_0}$ où σ est la densité surfacique de charge sur la plaque (le flux est nul sur la surface latérale et sur la base extérieure au condensateur). Au total, pour la surface S totale des plaques : $E' = \frac{q_{int}}{S\,\varepsilon_0}$.



• La tension aux bornes du condensateur est $U = E'\,e = \frac{q\,e}{S\,\varepsilon_0} = \frac{q}{C}$, donc : $C = \frac{\varepsilon_0\,S}{e}$.

2.a. • En opérant très lentement, la charge du condensateur se rééquilibre en permanence pour maintenir $U(t) = E$, donc il porte une charge : $q(t) = C(t)\,E$ (du côté + du générateur). Puisque e augmente, C diminue et q diminue, donc $i < 0$.
• Le générateur fournit donc : $\int E\,i(t)\,dt = E\,\Delta q = E^2\,\Delta C < 0$ (en fait il absorbe de l'énergie au sens arithmétique). La résistance absorbe : $\int R\,i^2(t)\,dt$ qui est négligeable, car du second ordre, pour un mouvement très lent. Le condensateur absorbe : $\Delta\left(\frac{1}{2}C\,U^2\right) = \frac{1}{2}\,\Delta C\,E^2 < 0$ (en fait il fournit de l'énergie au sens arithmétique, comme le laisse prévoir le sens qu'il impose au courant).
• Au total (il s'agit d'un travail mécanique positif car les charges de signes contraires portées par les deux plaques s'attirent), le travail à fournir au système est :

$$W_{ma} = -\int E\,i(t)\,dt + \int R\,i^2(t)\,dt + \Delta\left(\frac{1}{2}C\,U^2\right) \approx -\frac{1}{2}\,\Delta C\,E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\,S\,E^2.\left(\frac{1}{e_1} - \frac{1}{e_2}\right) > 0\ .$$

2.b. • En opérant très rapidement, la charge du condensateur ne peut pas se rééquilibrer “instantanément” à cause de la résistance R qui limite le courant (constante de temps $\tau = R\,C$). En considérant la limite d'un mouvement “quasi-instantané”, on peut supposer que la charge n'a pratiquement pas changé pendant le mouvement ; le générateur et la résistance n'absorbent donc rien pendant ce mouvement.
• Le condensateur absorbe : $\Delta\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) = \frac{1}{2}\,\Delta\left(\frac{1}{C}\right)\,q^2 > 0$; le travail à fournir au système (sous forme mécanique) est : $W_{mb} = \frac{1}{2}\,\Delta\left(\frac{1}{C}\right)\,q^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\,S\,E^2\,\frac{e_2 - e_1}{e_1^2} > 0$ (il s'agit d'un travail mécanique positif car les charges de signes contraires portées par les deux plaques s'attirent).
◊ remarque : $W_{mb} = W_{ma}\,\frac{e_2}{e_1}$.

3. • Dans les deux cas, il finit par y avoir équilibre avec $U = E$, donc il circule : $\Delta q = E\,\Delta C$. Le générateur fournit donc : $W_G = \int E\, i(t)\, dt = E\,\Delta q = E^2\,\Delta C = \varepsilon_0\, S\, E^2.\left(\frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_1}\right) < 0$ (il absorbe de l'énergie au sens arithmétique). Dans le second cas, ce travail correspond aux effets du courant qui apparaît “juste après” le déplacement pour rétablir l'équilibre (arithmétiquement, le condensateur cède alors de l'énergie au générateur et à la résistance).

4. • La résistance absorbe : $W_J = \int R\, i^2(t)\, dt$ qui est négligeable, car du second ordre, pour un mouvement très lent. Plus précisément, on peut imposer $|i(t)| < I_{max}$ où I_{max} est une valeur d'autant plus petite que le mouvement est lent ; par suite : $W_J < R\, I_{max} \int i(t)\, dt = R\, I_{max}\, |\Delta q|$. Or R et $|\Delta q|$ sont indépendants du mouvement, donc W_J peut être rendu arbitrairement petit en diminuant I_{max} , c'est-à-dire en ralentissant le mouvement.
• Pour un mouvement très rapide, on peut considérer que $q(0_+) \approx C_1\, E$ puisque la charge du condensateur n'a pratiquement pas eu le temps de varier. Par la suite, la loi des mailles implique une évolution telle que : $R\, i(t) + \frac{q(t)}{C_2} = E$ avec $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$.
• Les solutions sont de la forme : $q(t) = C_2\, E + A\, \mathrm{e}^{-t/\tau_2}$ avec $\tau_2 = R\, C_2$; d'après les conditions initiales : $q(t) = C_2\, E + (C_2 - C_1)\, E\, \mathrm{e}^{-t/\tau_2}$.
• On en déuit : $i(t) = \Delta C\, \frac{E}{R\, C_2}\, \mathrm{e}^{-t/\tau_2}$ et $W_J = \int_0^\infty R\, i^2(t)\, dt = \frac{(\Delta C)^2\, E^2}{2\, C_2} = \frac{1}{2} \varepsilon_0\, S\, E^2\, e_2\,.\left(\frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_1}\right)^2$.
◊ remarque : $W_J = -W_G\, \frac{e_1 + e_2}{2\, e_1}$.

5. • Pour le cas lent (réversible) : $W_{ma} = -W_G + \Delta\mathcal{E}$ (où $\mathcal{E}$ est l'énergie électrique dans le condensateur) ; ceci correspond à dire que la variation de l'énergie du circuit (générateur + résistor + condensateur) est égale au travail mécanique reçu par ce système.
• Pour le cas très rapide (irréversible) : $W_{ma} = -W_G + W_J + \Delta\mathcal{E}$; ceci correspond à dire que la variation d'énergie du système, y compris l'énergie thermique du résistor (il s'échauffe par l'effet Joule), est égale au travail mécanique reçu.
◊ remarque : on peut vérifier que $W_{mb} - W_{ma} = W_J$.