RÉGIMES TRANSITOIRES - CIRCUIT RLC - corrigé des exercices

A. EXERCICES DE BASE

I. Régime propre d'un circuit RLC

1. • L'équation différentielle qui décrit le régime “propre” d'un circuit RLC-série peut s'écrire (loi des mailles) : $R\,i + L\,\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$ avec $i = \frac{dq}{dt}$. Ceci correspond à : $\ddot{q} + 2\,\alpha\,\dot{q} + \omega_0^2\,q = 0$ avec $\alpha = \frac{R}{2\,L}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}$.

• En régime “propre” peu amorti (R faible, tel que $\alpha < \omega_0$) les solutions sont pseudo-périodiques, de la forme : $q = q_0\,\mathrm{e}^{-\alpha\,t}\,\cos(\omega\,t + \phi)$ avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$. La pseudo-période est : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ où ω peut s'exprimer avec $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$; ainsi : $T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\alpha\,T_0}{2\pi}\right)^2}}$.

◊ remarque : on retrouve bien ainsi $T \to T_0$ quand $R \to 0$ (c'est à dire $\alpha \to 0$).

• En développant à l'ordre le plus bas : $T \approx T_0 . \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\,T_0}{2\pi}\right)^2\right)$ et $\beta = \frac{T - T_0}{T_0} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\,T_0}{2\pi}\right)^2$. La limite $\beta < 10^{-3}$ correspond alors à : $\alpha = \frac{R}{2\,L} < \frac{2\pi}{T_0}\sqrt{\frac{2}{1000}}$ c'est-à-dire : $R < \sqrt{\frac{8}{1000}\,\frac{L}{C}} \approx 2{,}8\ \Omega$.

2. • Le facteur de qualité peut s'écrire : $Q = \frac{L\,\omega_0}{R} = \frac{\pi}{\alpha\,T_0}$. Avec l'approximation : $\beta \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\,T_0}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{8\,Q^2}$, on obtient alors pour la résonance aiguë : $\beta \approx 1{,}2.10^{-3}$; on peut donc en conclure qu'un circuit RLC peu amorti, donc très résonant, effectue des oscillations libres très semblables aux oscillations forcées résonantes.

• Pour une résonance “moyenne”, l'approximation $\beta \approx \frac{1}{8\,Q^2}$ donne $\beta \approx 0{,}12$; on peut donc en conclure qu'un circuit RLC moyennement amorti, donc médiocrement résonant, effectue des pseudo-oscillations libres à peu près semblables aux oscillations forcées résonantes.

• Pour une résonance floue, l'approximation $\beta \approx \frac{1}{8\,Q^2}$ donne $\beta \approx 12 \gg 1$; elle est donc visiblement absurde. Le calcul exact donne : $T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{1}{8\,Q^2}}}$, c'est-à-dire qu'il n'y a plus de pseudo-oscillations pour $Q \leq \frac{1}{\sqrt{8}} \approx 0{,}35$.

II. Réponse à un échelon de courant

1.a. • La loi des nœuds impose : $i_c = i + i' + i''$. La loi des mailles impose : $R\,i' = L\,\frac{di}{dt}$.

1.b. • La loi des mailles impose : $R\,i' = \frac{q}{C}$. La charge du condensateur impose : $i'' = \frac{dq}{dt}$.

1.c. • La combinaison des équations précédentes donne : $\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{R\,C}\,\frac{di}{dt} + \frac{1}{L\,C}\,i = \frac{1}{L\,C}\,i_c$.

2.a. • En posant $\alpha = \frac{1}{2\,R\,C}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}$ l'équation précédente s'écrit : $\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\,\alpha\,\frac{di}{dt} + \omega_0^2\,i = \omega_0^2\,i_c$.

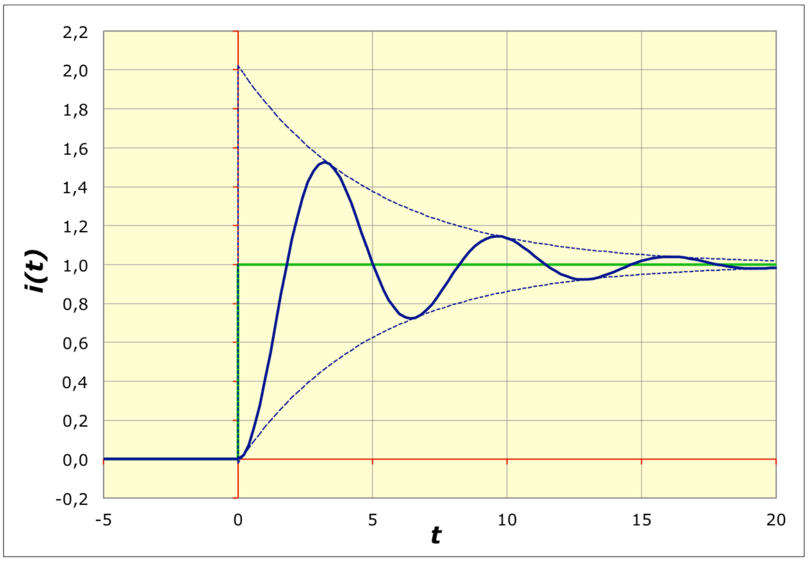
• Le discriminant réduit de l'équation caractéristique correspondante est : $\Delta' = \alpha^2 - \omega_0^2 < 0$.

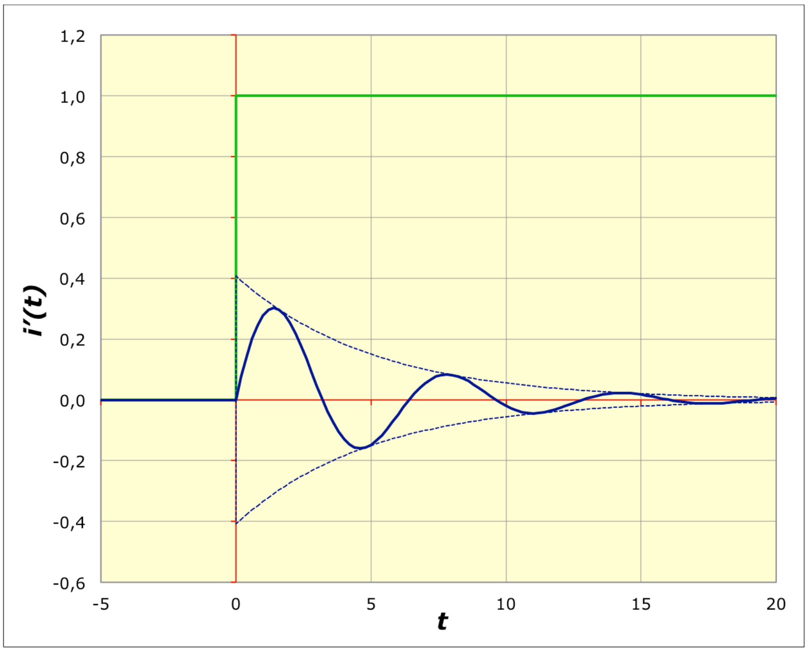
• Pour $t < 0$, la solution de l'équation différentielle peut s'écrire : $i = \mathrm{e}^{-\alpha\,t}\,[A\,\cos(\omega\,t) + B\,\sin(\omega\,t)]$ avec la pseudo-pulsation $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$. La situation étant invariante pour tout $t < 0$, la seule solution possible est : $i = 0$. On en déduit : $i' = \frac{L}{R}\,\frac{di}{dt} = 0$ et $i'' = R\,C\,\frac{di'}{dt} = 0$.

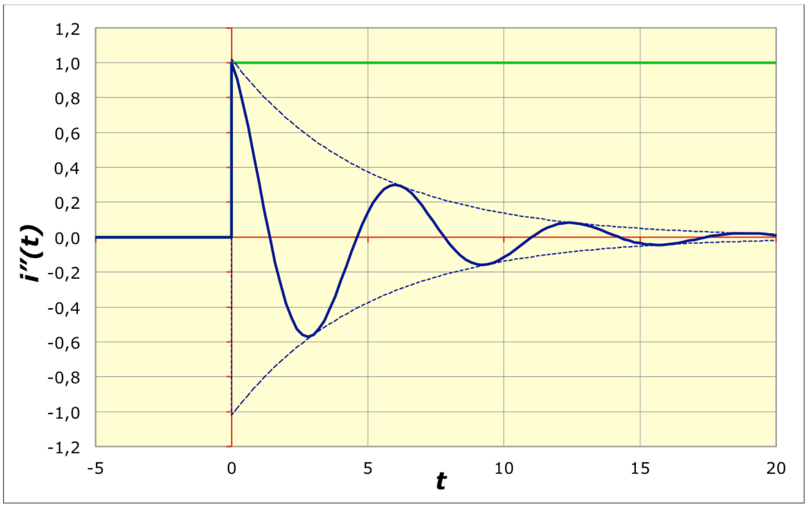
• Pour $t \geq 0$, la solution est de la forme : $i = I + \mathrm{e}^{-\alpha\,t}\,[A\,\cos(\omega\,t) + B\,\sin(\omega\,t)]$ et les conditions initiales imposent : $i = I - I\,\mathrm{e}^{-\alpha\,t}\left[\cos(\omega\,t) + \frac{\alpha}{\omega}\,\sin(\omega\,t)\right]$.

• On en déduit : $i' = \frac{L}{R}\,\frac{di}{dt} = I\,\mathrm{e}^{-\alpha\,t}\,\frac{2\,\alpha}{\omega}\,\sin(\omega\,t)$ et $i'' = R\,C\,\frac{di'}{dt} = I\,\mathrm{e}^{-\alpha\,t}\left[\cos(\omega\,t) - \frac{\alpha}{\omega}\,\sin(\omega\,t)\right]$.

2.b. • Les allures des variations respectives des courants i, i' et i'' sont les suivantes.







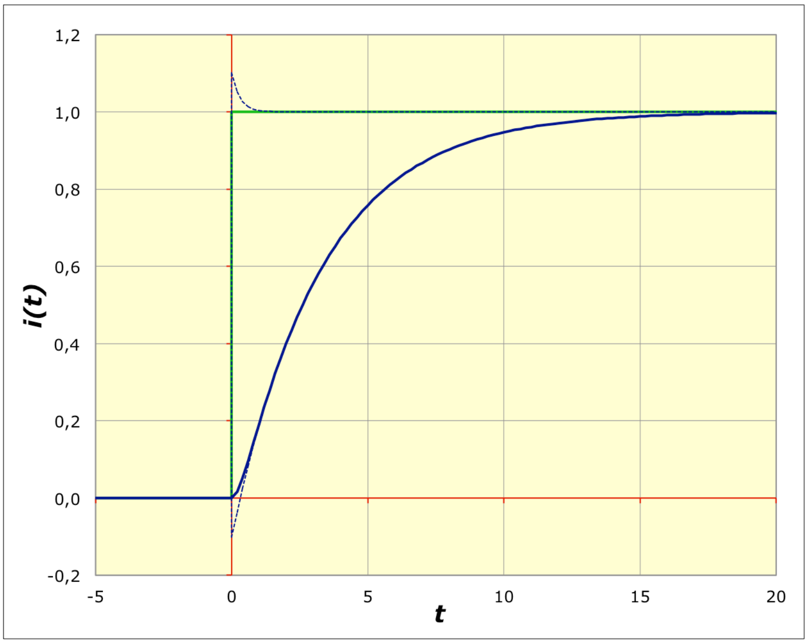
3.a. • Le discriminant réduit de l'équation caractéristique est ici : $\Delta' = \alpha^2 - \omega_0^2 > 0$ (avec les mêmes notations).

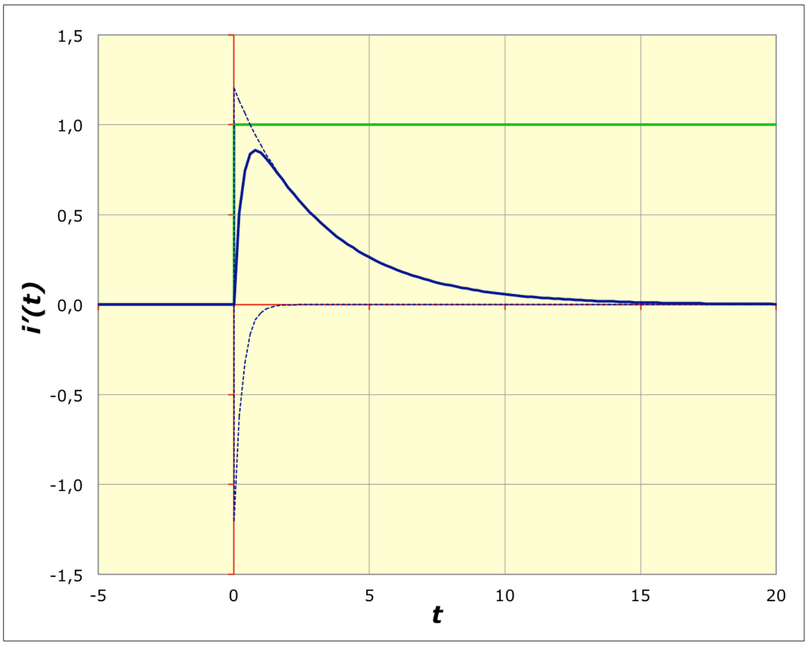
• Pour $t < 0$, la solution de l'équation différentielle est de la forme : $i = A\,\mathrm{e}^{-\lambda t} + B\,\mathrm{e}^{-\mu t}$ en posant $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$; $\lambda = \alpha - \beta$ et $\mu = \alpha + \beta > \lambda$. La situation étant invariante pour tout $t < 0$, la seule solution possible est : $i = 0$. On en déduit : $i' = \frac{L}{R}\,\frac{di}{dt} = 0$ et $i'' = R\,C\,\frac{di'}{dt} = 0$.

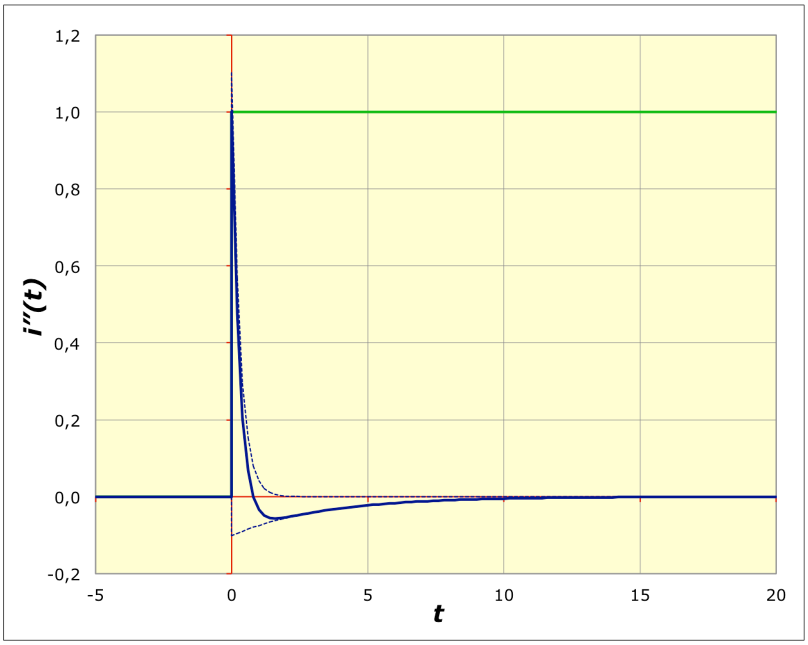
• Pour $t \geq 0$, la solution de l'équation différentielle est de la forme : $i = I + A\,\mathrm{e}^{-\lambda t} + B\,\mathrm{e}^{-\mu t}$ et les conditions initiales imposent : $i = I - I\,\frac{\mu}{2\beta}\left[\mathrm{e}^{-\lambda t} - \frac{\lambda}{\mu}\,\mathrm{e}^{-\mu t}\right]$.

• On en déduit : $i' = \frac{L}{R}\,\frac{di}{dt} = I\,\frac{\alpha}{\beta}\left[\mathrm{e}^{-\lambda t} - \mathrm{e}^{-\mu t}\right]$ et $i'' = R\,C\,\frac{di'}{dt} = I\,\frac{\mu}{2\beta}\left[\mathrm{e}^{-\mu t} - \frac{\lambda}{\mu}\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]$.

3.b. • Les allures des variations respectives des courants i, i' et i'' sont les suivantes.







4.a. • La loi des mailles modifiée s'écrit maintenant : $R\,i' = r\,i + L\,\frac{di}{dt}$.

• La combinaison des équations donne : $\frac{d^2i}{dt^2} + \left(\frac{1}{R\,C} + \frac{r}{L}\right)\frac{di}{dt} + \frac{R+r}{R}\,\frac{1}{L\,C}\,i = \frac{1}{L\,C}\,i_C$.

4.b. • Pour retrouver la même équation, il est nécessaire et suffisant d'imposer :

$\frac{1}{R'\,C'} = \frac{1}{R\,C} + \frac{r}{L}$; $\frac{1}{L'\,C'} = \frac{R+r}{R}\,\frac{1}{L\,C}$; $\frac{1}{L'\,C'}\,I' = \frac{1}{L\,C}\,I$.

• Ce système de trois équations à quatre inconnues a en fait une infinité de solutions : on peut imposer une contrainte supplémentaire.

◊ remarque : on ne peut pas imposer $I' = I$ car la seconde équation donnerait $r = 0$.

4.c. • En imposant $C' = C$, on obtient : $R' = \frac{L}{L+r\,R\,C}\,R$; $L' = \frac{R}{R+r}\,L$; $I' = \frac{R}{R+r}\,I$.

◊ remarque : cette “renormalisation” des coefficients permet de simplifier le calcul et de retrouver toutes les quantités souhaitées.

4.d. • Pour $t \geq 0$, la solution de l'équation différentielle est de la forme : $i = I' + A\,\mathrm{e}^{-\lambda' t} + B\,\mathrm{e}^{-\mu' t}$ avec les coefficients : $\alpha' = \frac{1}{2\,R'\,C} = \frac{L+r\,R\,C}{L}\,\alpha$; $\omega'_0 = \frac{1}{\sqrt{L'\,C}} = \sqrt{\frac{R+r}{R}}\,\omega_0$; $\beta' = \sqrt{\alpha'^2 - \omega'^2_0}$; $\lambda' = \alpha' - \beta'$ et $\mu' = \alpha' + \beta'$.

• Les conditions initiales imposent ici encore la continuité de $i(t)$ dans la bobine (car dans l'inductance) et la continuité de la dérivée $\frac{di}{dt}$ (continuité de la tension aux bornes du condensateur, donc de la tension $r\,i + L\,\frac{di}{dt}$ aux bornes de la bobine, donc la continuité de i impose celle de $\frac{di}{dt}$).

4.e. • Le raisonnement sur le régime apériodique nécessitait $R > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$; l'application au nouveau raisonnement nécessite de même $R' > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L'}{C}}$; ceci impose donc : $\frac{L}{L+r\,R\,C} > \sqrt{\frac{R}{R+r}}$.

• On en déduit la condition : $r < \frac{L^2}{R^3\,C}\left(1 - \frac{2\,R^2\,C}{L}\right)$; c'est donc envisageable seulement si la résistance r de la bobine n'est pas trop grande.

• Qui plus est, la condition $R > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$ correspond à $\frac{2\,R^2\,C}{L} > \frac{1}{2}$; il faut donc que le régime ne soit pas “trop” apériodique : $\frac{1}{2} < \frac{2\,R^2\,C}{L} < 1$ correspond à $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} < R < \sqrt{\frac{L}{2\,C}}$ (sinon les deux cas, avec ou sans r, ne sont pas du même type, donc le raisonnement ne peut pas s'appliquer).

III. Limite du régime critique

1. • Pour $\alpha > \omega_0$, on peut ré-écrire l'expression sous la forme : $u(t) = (E - E') \, e^{-2\alpha t} \, \frac{\mu \, e^{\mu t} - \lambda \, e^{\lambda t}}{\mu - \lambda} + E'$.

• La limite $\alpha \to \omega_0$ correspond à $\mu \to \alpha$ et $\lambda \to \alpha$; ainsi :

$u(t) \to (E - E') \, e^{-2\alpha t} \, \frac{\partial(\alpha \, e^{\alpha t})}{\partial \alpha} + E' = (E - E') \, e^{-2\alpha t} \, (\alpha t + 1) \, e^{\alpha t} + E'$;

$u(t) \to (E - E') \, (\alpha t + 1) \, e^{-\alpha t} + E'$.

2. • Pour $\alpha < \omega_0$, près du cas critique, la décroissance rapide de l'amplitude d'oscillation fait que le comportement général est semblable à celui au voisinage de $t = 0$. On peut alors considérer $\cos(\omega t) \approx 1$ et $\sin(\omega t) \approx \omega t$; ceci donne : $u(t) \approx (E - E') \, e^{-\alpha t} \, (1 + \alpha t) + E'$. Des précisions sont toutefois nécessaires.

• En posant $\lambda' = \alpha - j \omega$ et $\mu' = \alpha + j \omega$, on peut écrire : $u(t) = (E - E') \, e^{-2\alpha t} \, \frac{\mu' \, e^{\mu' t} - \lambda' \, e^{\lambda' t}}{\mu' - \lambda'} + E'$. La limite $\alpha \to \omega_0$ correspond à $\omega \to 0$, $\mu' \to \alpha$ et $\lambda' \to \alpha$; on obtient ainsi le même résultat que précédemment.

B. EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

IV. Propagation le long d'un câble coaxial

1. • Le courant traversant la capacité est : $i_1 = i(x) - i(x + dx) = -\delta i = -\frac{\partial i}{\partial x} \, dx$.

• On en déduit : $\frac{\partial(u(x+dx))}{\partial t} = \frac{\partial\left(\frac{\delta q}{\delta C}\right)}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma} \, \frac{\partial i}{\partial x}$. Ceci peut s'écrire : $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma} \, \frac{\partial i}{\partial x}$ car la différence entre $u(x)$ et $u(x + dx)$ est ici négligeable puisque d'ordre supérieur.

2. • Les tensions aux bornes des inductances sont : $u_{AA'} = \delta L \, \frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\lambda}{2} \, dx \, \frac{\partial i}{\partial t}$ et $u_{BB'} = -\frac{\lambda}{2} \, dx \, \frac{\partial i}{\partial t}$.

• On peut écrire : $\delta u = u(x + dx) - u(x) = -\lambda \, dx \, \frac{\partial i}{\partial t}$ mais $\delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \, dx$ donc : $\frac{\partial u}{\partial x} = -\lambda \, \frac{\partial i}{\partial t}$.

3. • En combinant les deux équations entre u et i, on obtient : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\lambda \, \frac{\partial^2 i}{\partial x \, \partial t} = \gamma \, \lambda \, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, donc u est solution d'une équation de la forme : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \gamma \, \lambda \, \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$. On obtient de même une équation de cette forme pour i.

4. • Les fonctions de la forme $f\left(t \pm \frac{x}{c}\right)$ donnent : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \, \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$; elles sont solution de l'équation du type précédent si : $c = \frac{1}{\sqrt{\gamma \, \lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \, \mu_0}}$.

• Ce type de solutions décrit une propagation, à la célérité c vers les $x > 0$ pour $f_1\left(t - \frac{x}{c}\right)$, puisqu'on retrouve la même valeur de la fonction pour $t' > t$ à la position $x' = x + c \, t > x$. De même $f_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$ décrit une propagation à la célérité c vers les $x < 0$.

• En outre, $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \, \mu_0}} = 3.10^8 \; \mathrm{m.s^{-1}}$ est la célérité de la lumière dans le vide.

V. Transformation de Laplace

1.a. • Pourvu que les intégrales convergent (ce qui peut imposer des conditions restrictives sur les fonctions f autorisées), on peut intervertir l'ordre d'intégration en respectant le domaine $(u \, , t) \in \mathbb{R}^{+2}$ avec $t > u$:

$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) \, du\right\} = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(u) \, du\right) \, e^{-p t} \, dt = \int_0^\infty \left(\int_u^\infty e^{-p t} \, dt\right) f(u) \, du$;

$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) \, du\right\} = \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-p u} \, f(u) \, du = \frac{1}{p} \, \mathcal{L}\{f(u)\} = \frac{1}{p} \, \mathcal{F}(p)$.

◊ remarque : $\mathcal{L}\{f(u)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$ car la variable t de $f(t)$ est “muette”, c’est-à-dire qu'elle disparaît (après intégration) dans l’écriture de $\mathcal{F}(p)$.

1.b. • D’une façon analogue, à l’aide d’une intégration par parties :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}\ \mathrm{e}^{-p\,t}\ dt = [f(t)\ \mathrm{e}^{-p\,t}]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\ \frac{d(\mathrm{e}^{-p\,t})}{dt}\ dt \ ;$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = f(0) + p\ \int_0^\infty f(t)\ \mathrm{e}^{-p\,t}\ dt = p\ \mathcal{L}\{f(t)\} = p\ \mathcal{F}(p) .$$

1.c. • Par simple intégration :

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \int_0^\infty h(t)\ \mathrm{e}^{-p\,t}\ dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-p\,t}\ dt = -\frac{1}{p}\ [\mathrm{e}^{-p\,t}]_0^\infty = \frac{1}{p} .$$

• De même avec un changement de variable :

$$\mathcal{L}\{h(t-\theta)\} = \int_0^\infty h(t-\theta)\ \mathrm{e}^{-p\,t}\ dt = \int_\theta^\infty \mathrm{e}^{-p\,t}\ dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-p.(t'+\theta)}\ dt' \ ;$$

$$\mathcal{L}\{h(t-\theta)\} = \mathrm{e}^{-p\,\theta} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-p\,t'}\ dt' = \frac{1}{p}\ \mathrm{e}^{-p\,\theta} .$$

1.d. • D’une façon semblable :

$$\mathcal{L}\{h(t)\ \mathrm{e}^{-a\,t}\} = \int_0^\infty h(t)\ \mathrm{e}^{-a\,t}\ \mathrm{e}^{-p\,t}\ dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(p+a)\,t}\ dt = \frac{1}{p+a} .$$

• De même avec un changement de variable :

$$\mathcal{L}\left\{h(t-\theta)\ \mathrm{e}^{-a.(t-\theta)}\right\} = \mathrm{e}^{-p\,\theta}\mathcal{L}\{h(t)\ \mathrm{e}^{-a\,t}\} = \frac{1}{p+a}\ \mathrm{e}^{-p\,\theta} .$$

◊ remarque : il y a une symétrie de comportement :

◊ la multiplication de $f(t)$ par $\mathrm{e}^{-a\,t}$ décale $\mathcal{F}(p)$ en $\mathcal{F}(p+a)$;

◊ le décalage de $f(t)$ en $f(t-\theta)$ multiplie $\mathcal{F}(p)$ par $\mathrm{e}^{-p\,\theta}$.

2.a. • Pour $t \leq 0$ le condensateur est déchargé et la tension entre ses bornes est nulle ; le courant est donc nul et la tension aux bornes de la résistance est nulle : la tension E se retrouve aux bornes de l’interrupteur.

• L’assemblage RC est alors soumis à une tension nulle, mais ceci n’équivaut à un générateur de f.e.m. nulle que si le courant est libre de circuler. Toutefois, on considère le cas où le condensateur est déchargé, ce qui implique un courant nul, donc le circuit avec l’interrupteur qui empêche le courant de circuler (en supportant E) revient au même qu’un circuit avec une f.e.m. nulle en l’absence d’interrupteur.

• Pour $t > 0$ le circuit est soumis à la f.e.m. E, ce qui équivaut au total à : $e(t) = E\ h(t)$.

2.b. • La loi des mailles s’écrit : $e(t) = R\ i(t) + \frac{1}{C} \int i(t)\ dt$.

2.c. • Par sa définition sous forme d’intégrale, la transformée de Laplace est linéaire :

$$\mathcal{L}\{f+g\} = \mathcal{L}\{f\} + \mathcal{L}\{g\} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}\{\alpha\, f\} = \alpha\ \mathcal{L}\{f\} .$$

• Compte tenu de la question précédente, on en déduit : $\mathcal{E}(p) = R\ \mathcal{I}(p) + \frac{1}{C}\frac{1}{p}\ \mathcal{I}(p)$.

• Puisque : $\mathcal{E}(p) = \mathcal{L}\{e(t)\} = E\ \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{E}{p}$, on en déduit : $\mathcal{I}(p) = \frac{E}{R.\left(p+\frac{1}{R\,C}\right)}$. D’après la question précédente, on obtient : $i(t) = \frac{E}{R}\ h(t)\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$ avec $\tau = R\ C$.

3.a. • La loi des mailles s’écrit : $e(t) = L\ \frac{di(t)}{dt} + R\ i(t) + \frac{1}{C} \int i(t)\ dt$.

3.b. • On en déduit : $\mathcal{E}(p) = L\ p\ \mathcal{I}(p) + R\ \mathcal{I}(p) + \frac{1}{C}\frac{1}{p}\ \mathcal{I}(p)$.

3.c. • Puisque : $\mathcal{E}(p) = \mathcal{L}\{e(t)\} = E\ \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{E}{p}$, on en déduit (en utilisant l’hypothèse de factorisation du polynôme caractéristique, comme indiqué par l’énoncé) : $\mathcal{I}(p) = \frac{E}{L.(p-\omega')(p-\omega'')}$.

• Ceci peut se décomposer en fractions rationnelles simples : $\mathcal{I}(p) = \frac{E}{L.(\omega'-\omega'')}\left(\frac{1}{p-\omega'} - \frac{1}{p-\omega''}\right)$.

3.d. • D'après la question précédente, on obtient : $i(t) = \frac{E}{L.(\omega' - \omega'')} h(t) \left(\mathrm{e}^{-\omega' t} - \mathrm{e}^{-\omega'' t}\right)$.

• Si les deux racines sont réelles, elles sont négatives (les coefficients du polynôme caractéristique indiquent deux racines de même signe dont la somme est négative) ; on obtient une somme de deux exponentielles décroissantes, ce qui correspond à un régime amorti apériodique.

• Si les deux racines sont complexes (conjuguées), leur partie réelle commune est négative ; on obtient le produit d'une exponentielle décroissante par une sinusoïde, ce qui correspond à un régime amorti pseudo-périodique.