

RÉGIMES TRANSITOIRES - mesures et commentaires du TP2

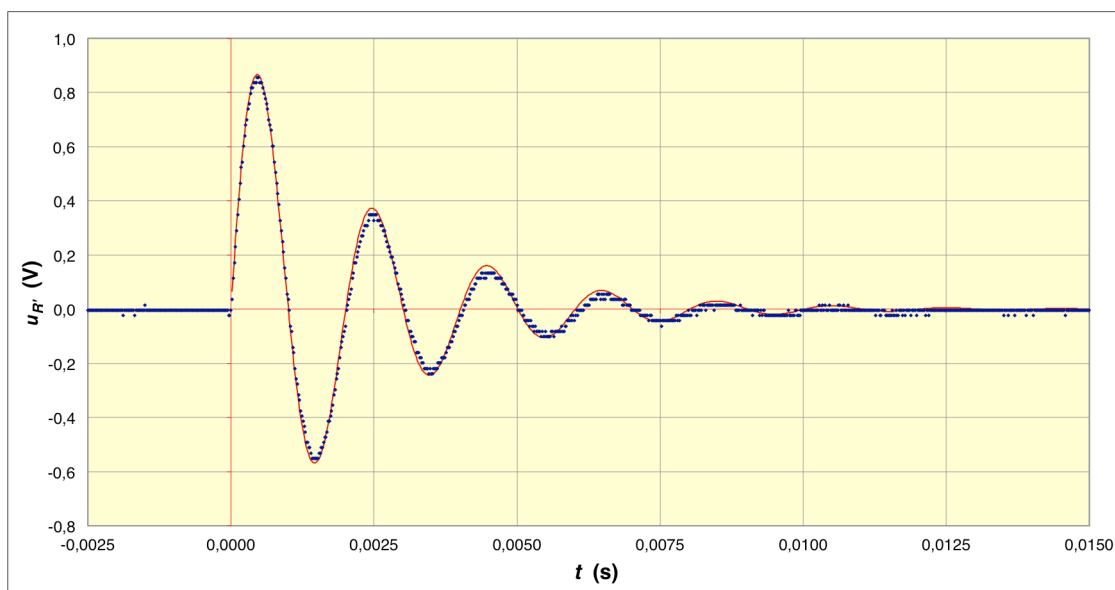
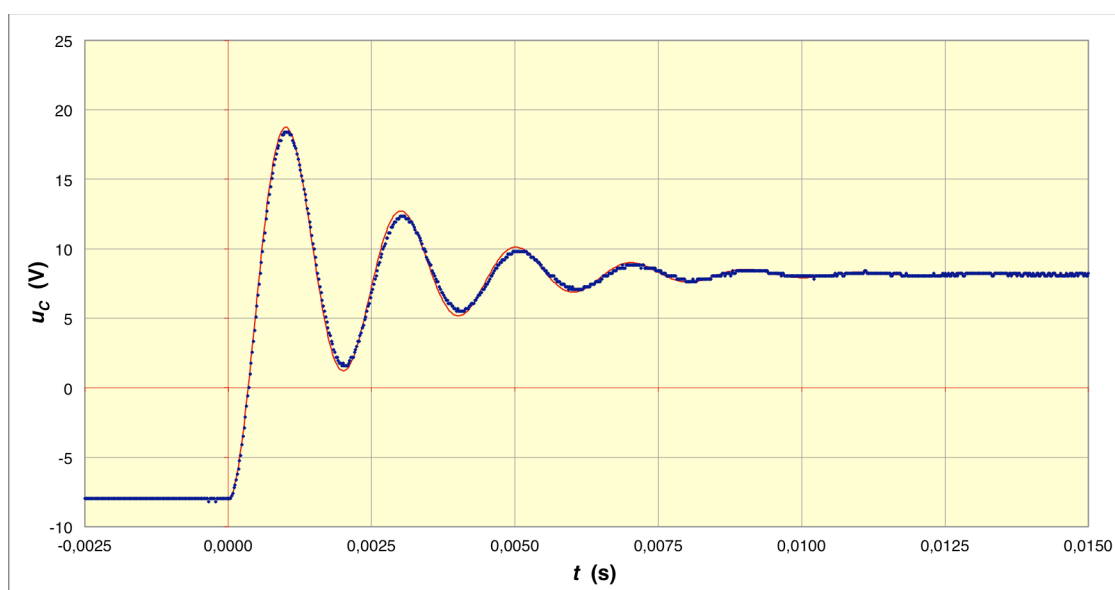
1. Circuit "RLC"

1.1. Régime pseudo-périodique

• On réalise le montage avec $C = 1,03 \pm 0,01 \mu\text{F}$; $L = 97,2 \pm 1,2 \text{ mH}$; $r = 11,8 \pm 0,3 \Omega$ et $r' = 50 \pm 2 \Omega$. On s'intéresse ici à l'influence de la résistance.

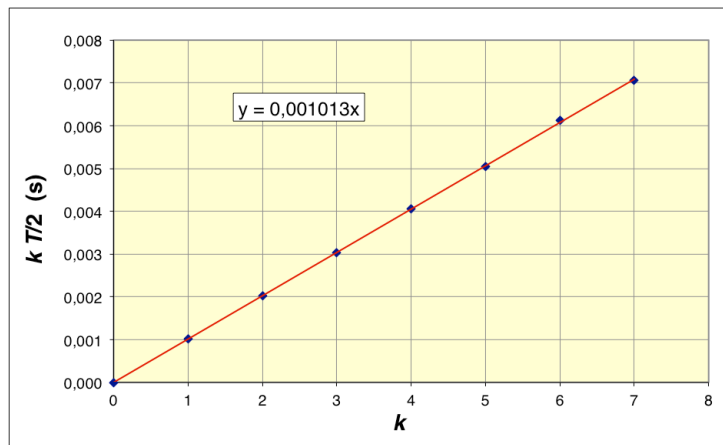
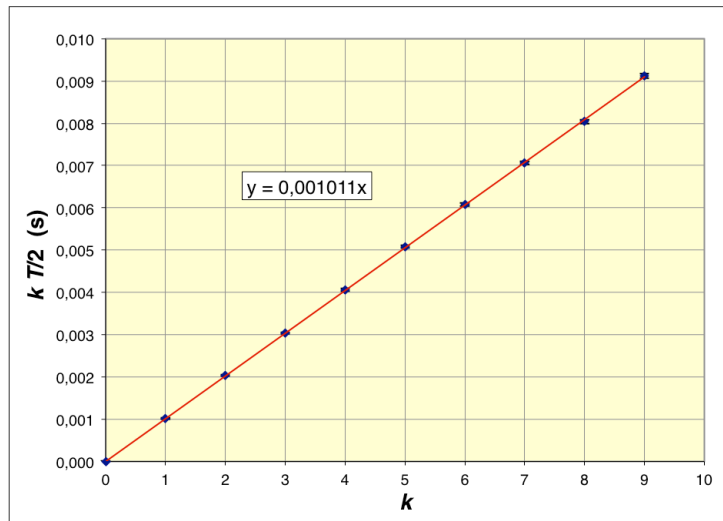
• Pour $R' = 20,0 \pm 0,1 \Omega$ ($R = 81,8 \pm 2,4 \Omega$) on observe un régime pseudo-périodique.

♦ remarque : on choisit R' assez faible pour obtenir le régime souhaité, mais une valeur trop petite causerait des incertitudes trop grandes sur la mesure de $i(t)$.



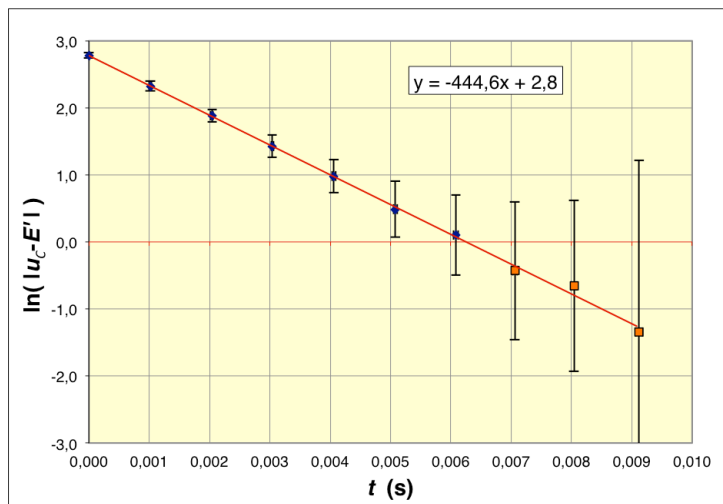
Les courbes théoriques pour $u(t) = u_C(t)$ et $u_{R'}(t) = R' i(t)$ (en rouge) sont comparées aux mesures ; les écarts sont inférieurs aux incertitudes expérimentales (non représentées car cela gênerait la lisibilité des graphiques).

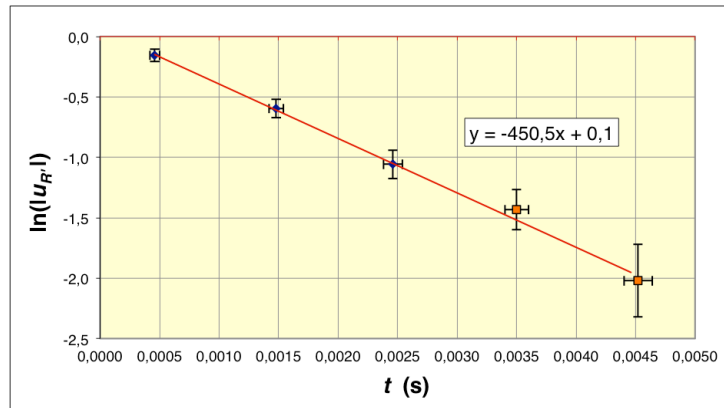
- La succession des extremums relatifs permet d'estimer la pseudo-période, tant pour $u(t)$ que pour $i(t)$.



On obtient ainsi $T = 2,023 \pm 0,015$ ms tout à fait compatible avec la théorie : $T_{th} = 2,006 \pm 0,023$ ms .

- On peut aussi vérifier la décroissance logarithmique des extremums (par rapport à l'asymptote $u(t) = E'$ pour le condensateur).

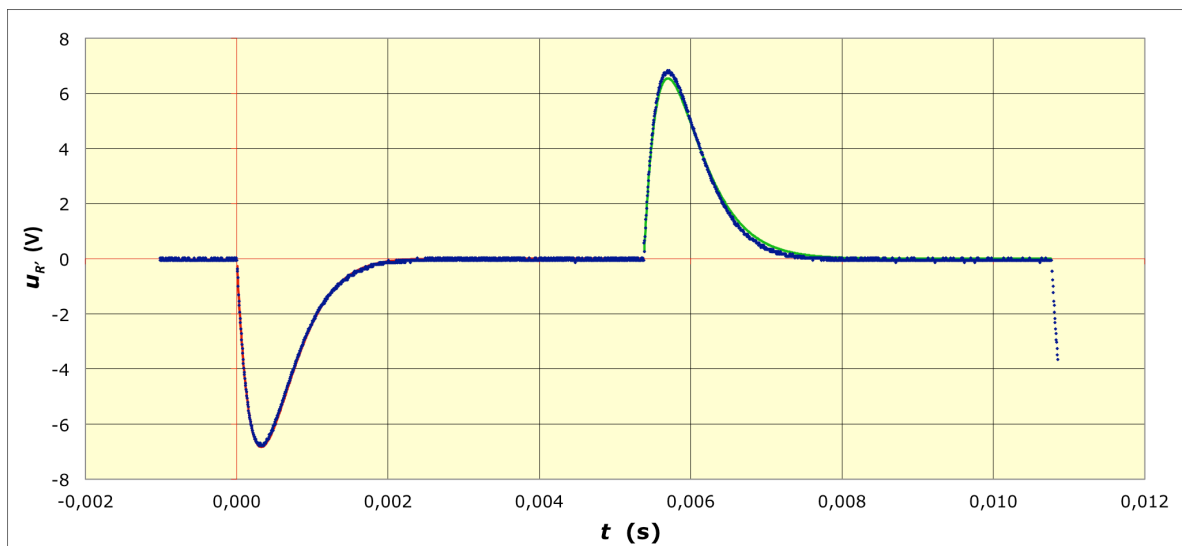
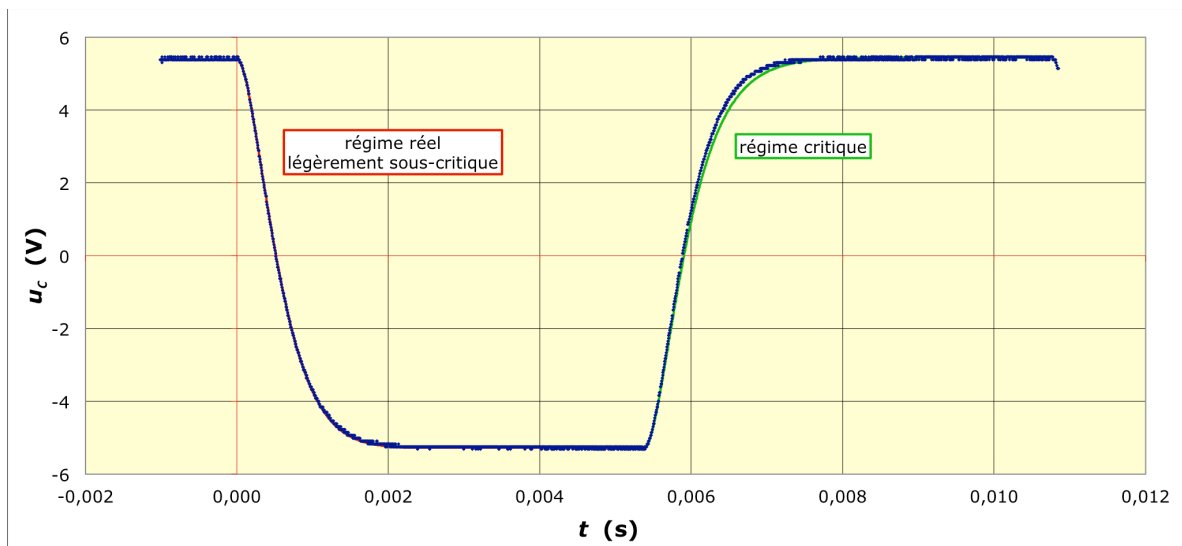




On obtient un coefficient d'amortissement $\alpha = 446 \pm 35 \text{ rad.s}^{-1}$ tout à fait compatible avec la valeur théorique $\alpha = \frac{R}{2L} = 421 \pm 18 \text{ rad.s}^{-1}$.

1.2. Régime critique

- En observant la courbe sur l'écran de l'oscilloscope, on essaye d'ajuster R' pour atteindre visuellement juste la limite de disparition des pseudo-périodes ; le réglage semble optimum pour $R' = 510 \pm 5 \Omega$.



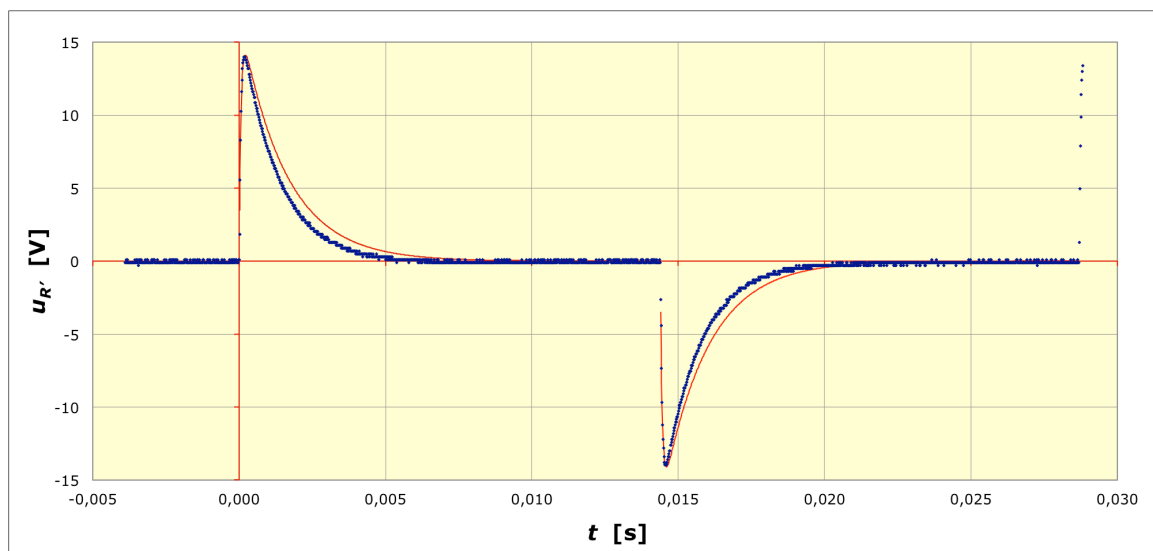
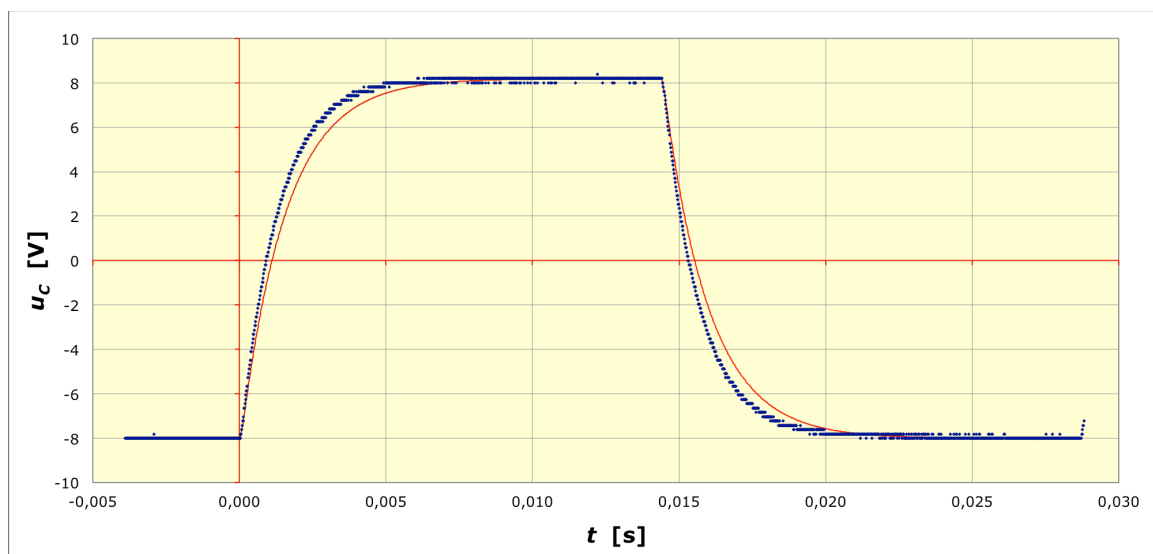
• Cela correspond à $R = 571,8 \pm 7,3 \Omega$; les courbes théoriques associées, tracées en rouge sur la partie de gauche, montrent un bon accord.

Par contre, la théorie prévoit $R_c = 614,4 \pm 12,9 \Omega$; l'écart est plus du double de l'incertitude. Effectivement les courbes théoriques associées pour le régime critique, tracées en vert sur la partie de droite, montrent un écart modéré mais net. Ceci correspond à un effet relativement bien connu : le contrôle visuel conduit généralement à une légère sous-estimation de la limite critique lorsque le dernier reste d'oscillation devient de l'épaisseur du trait (pour aider à s'en rendre compte, un simulateur au format tableur est joint en annexe).

♦ remarque : il aurait été intéressant que les étudiants, prenant conscience de cela, aient refait un enregistrement expérimental correspondant mieux au cas critique... ils ne l'ont pas fait.

1.3. Régime apériodique

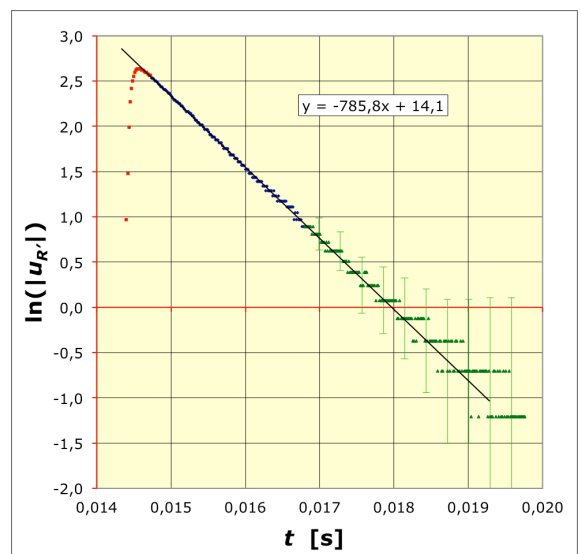
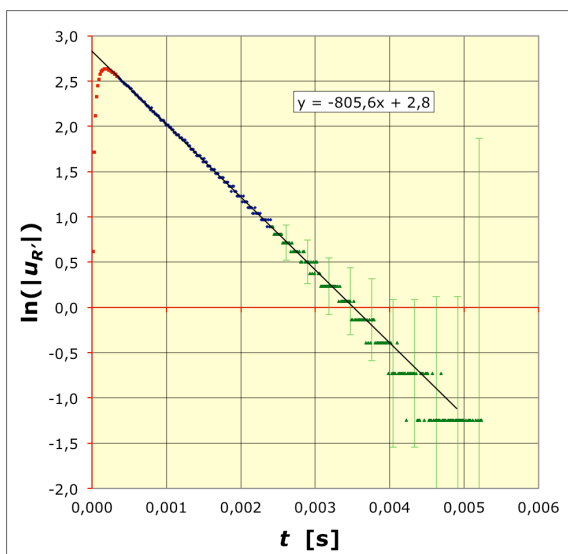
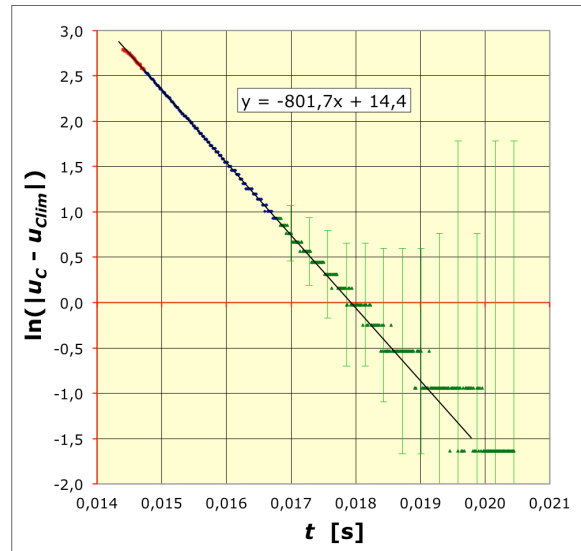
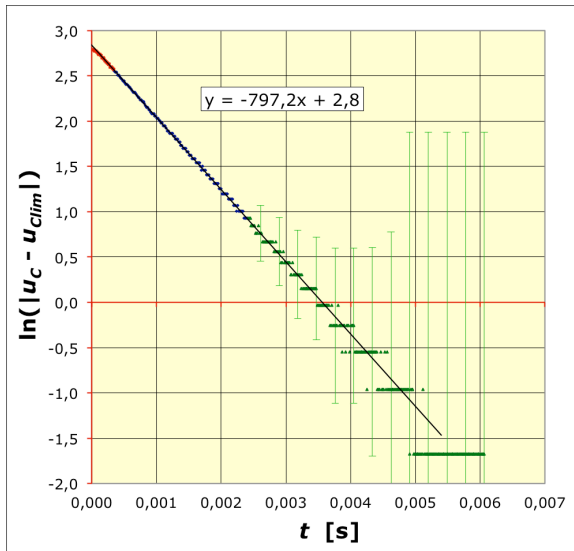
• Pour $R' = 1494 \pm 10 \Omega$ ($R = 1556 \pm 12 \Omega$) on observe un régime apériodique.



Les courbes théoriques pour $u(t) = u_c(t)$ et $u_R(t) = R' i(t)$ (en rouge) sont comparées aux mesures. L'allure générale est satisfaisante, mais les écarts sont supérieurs aux incertitudes expérimentales (non représentées car cela gênerait la lisibilité des graphiques) ; la décroissance semble en pratique plus rapide.

Cela pourrait être dû (au moins en partie) aux parasites radio à 50 Hz : le montage utilise une “masse flottante” et la périodicité est ici voisine de 20 ms . Cela semble toutefois très improbable vu la faiblesse des écarts observés dans les parties asymptotiques, en particulier aux bornes de la résistance (dans ces conditions les résistances “font antenne”).

• On peut alors vérifier la décroissance exponentielle $e^{-\lambda t}$ en omettant le début, où intervient le terme $e^{-\mu t}$, ainsi que la fin, où les incertitudes sont trop grandes. On obtient ainsi une modélisation satisfaisante avec $\lambda = 798 \pm 9 \text{ s}^{-1}$; l'écart avec la valeur théorique $\lambda = 650 \pm 13 \text{ s}^{-1}$ est toutefois loin d'être négligeable : il correspondrait à $R = 1294 \pm 25 \Omega$ ($R' = 1232 \pm 26 \Omega$).

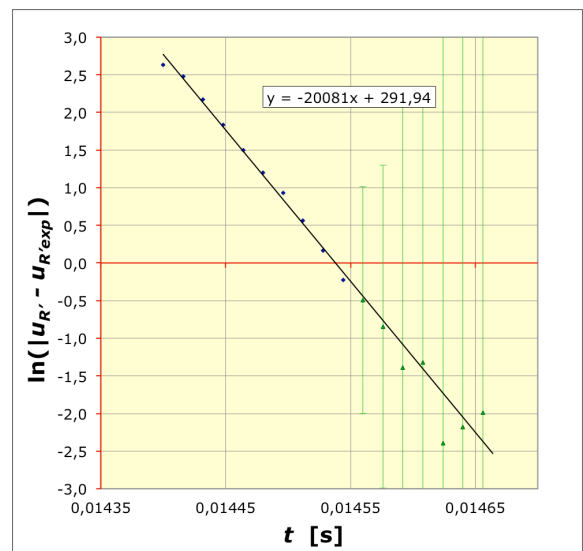
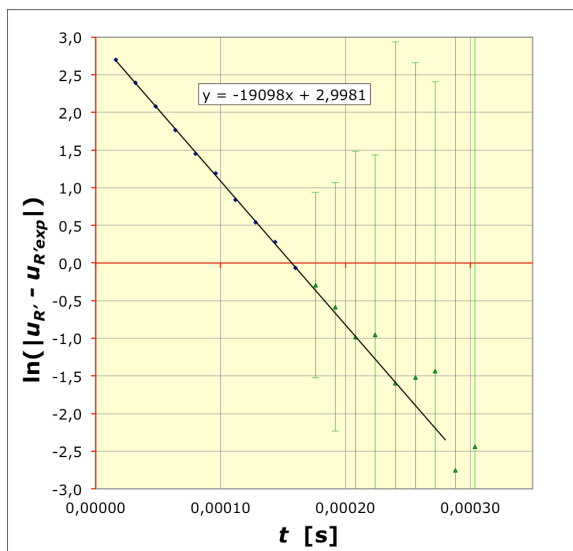
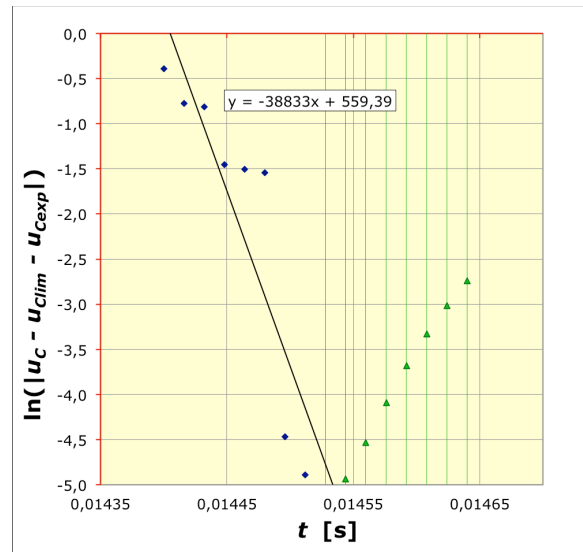
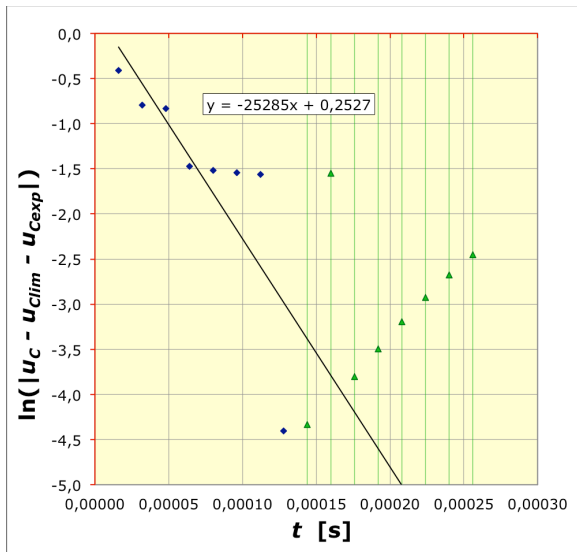


• On peut ensuite vérifier la décroissance du terme exponentiel $e^{-\mu t}$ du début, par différence au terme $e^{-\lambda t}$ ajusté (ici encore, on met à part les derniers points du début, où les incertitudes sont trop grandes).

Pour les variations de $u(t)$ aux bornes du condensateur, ce terme est en proportion trop petit : on le calcule par combinaison de termes nettement plus grands ; ainsi on ne peut que vérifier la compatibilité de l'ordre de grandeur avec la détermination d'après $i(t)$.

On obtient ainsi une modélisation satisfaisante avec $\mu = 19590 \pm 490 \text{ s}^{-1}$; l'écart avec la valeur théorique $\mu = 15356 \pm 337 \text{ s}^{-1}$ est loin d'être négligeable : il correspondrait à $R = 1854 \pm 55 \Omega$ ($R' = 1792 \pm 55 \Omega$).

Il est intéressant de remarquer que l'ajustement de μ surestime R , contrairement au précédent pour λ qui sous-estimait ; on peut donc penser qu'il ne s'agit pas d'une erreur de mesure de cette résistance, mais d'un biais systématique non évident.



1.4. Influence de la capacité

- Certains groupes ont de même étudié l'influence de C , mais ils n'ont pas transmis leurs résultats.

2. Simulation d'un frottement solide

- On suppose que la tension aux bornes du couple de diodes peut être modélisée par une constante en valeur absolue et opposée au sens de mouvement des charges : $u_d = \text{sgn}(i) U_s$, avec $U_s \approx 0,6 \text{ V}$.

♦ remarque : quand les diodes sont bloquées, la tension a une valeur intermédiaire dans l'intervalle $\pm U_s$ mais cela importe peu car le circuit est alors statique (courant nul).

- En seconde approximation, on peut tenir compte d'une (faible) résistance des diodes quand elles sont passantes, mais cela ne fait qu'augmenter un peu l'inévitable résistance du reste du circuit.

♦ remarque : en troisième approximation, modéliser avec la caractéristique réelle des diodes est compliqué.

• Dans un premier temps, on peut négliger la résistance. L'équation décrivant le circuit peut s'écrire : $LC \ddot{u} + u = e - \text{sgn}(\dot{u}) U_s$.

On suppose que la valeur initiale est $u = U_0 > 0$ (constante asymptotique du créneau précédent) et que le générateur passe à une valeur constante E inférieure, tendant à décharger le condensateur ($\dot{u} < 0$). L'inductance impose la continuité du courant $i = C \dot{u}$ donc $\dot{u}(0) = 0$ mais ensuite l'équation décrivant le circuit peut s'écrire : $LC \ddot{u} + u = E + U_s$ ou encore : $\ddot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 (E + U_s)$.

Compte tenu des conditions initiales, la solution peut s'écrire : $u = (U_0 - (E + U_s)) \cos(\omega_0 t) + (E + U_s)$. Ceci nécessite toutefois une amplitude $U_{m0} = U_0 - (E + U_s) > 0$ c'est-à-dire $E < U_0 - U_s$.

À la fin d'une demi oscillation, un extremum est atteint avec $\dot{u} = 0$ et $u = 2(E + U_s) - U_0 = U_1$.

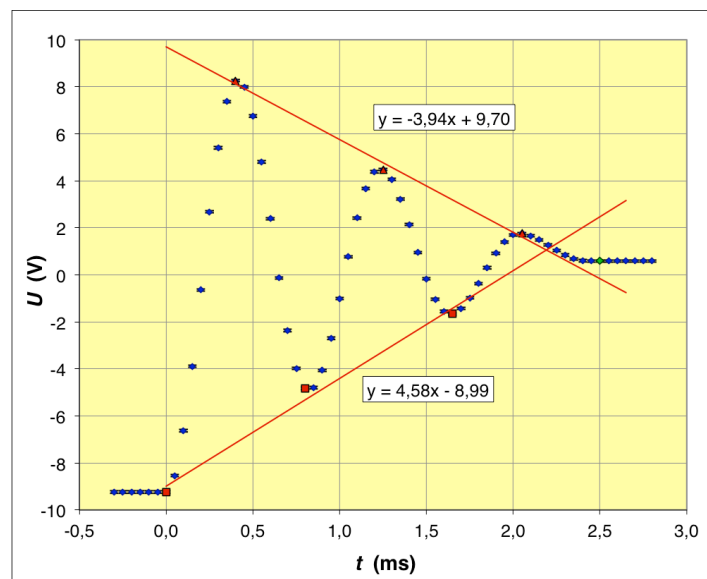
Ensuite l'équation peut s'écrire : $\ddot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 (E - U_s)$ et si $U_{m1} = (E - U_s) - U_1 > 0$ c'est-à-dire $E > U_1 + U_s$ la solution est : $u = U_{m1} \cos(\omega_0 t) + (E - U_s)$ avec $U_{m1} = U_{m0} - 2 U_s$.

À la fin de la deuxième demi oscillation, un extremum est atteint avec $\dot{u} = 0$ et $u = 2(E - U_s) - U_1 = U_2$.

L'oscillation continue alors à condition que $E < U_2 - U_s$ et ainsi de suite. L'amplitude de la troisième demi-oscillation est $U_{m2} = U_2 - (E + U_s) = U_{m0} - 4 U_s$. L'amplitude décroît de $4 U_s$ par pseudo-période, c'est-à-dire que les extremums sont respectivement alignés sur deux droites.

Dès qu'un extremum intervient dans l'intervalle $E \pm U_s$ les diodes restent bloquées et les oscillations cessent.

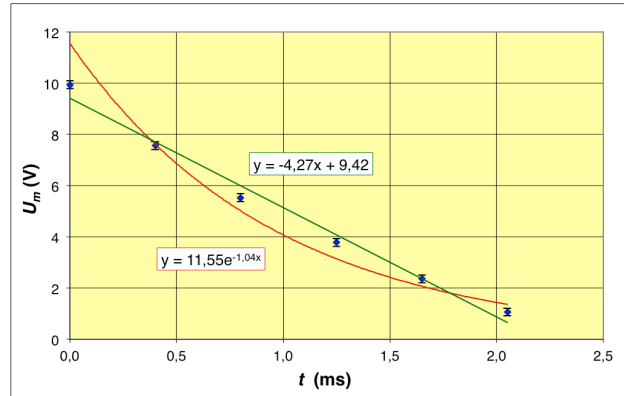
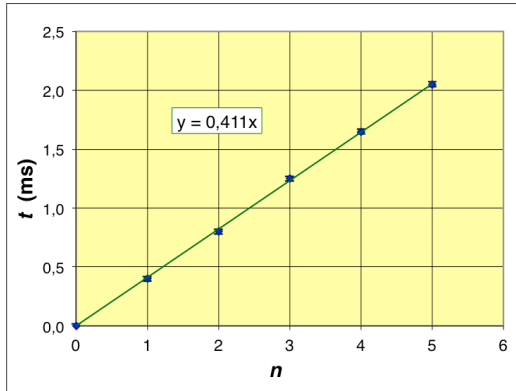
• Un premier groupe, utilisant du matériel ancien, obtient une courbe d'allure convenable.



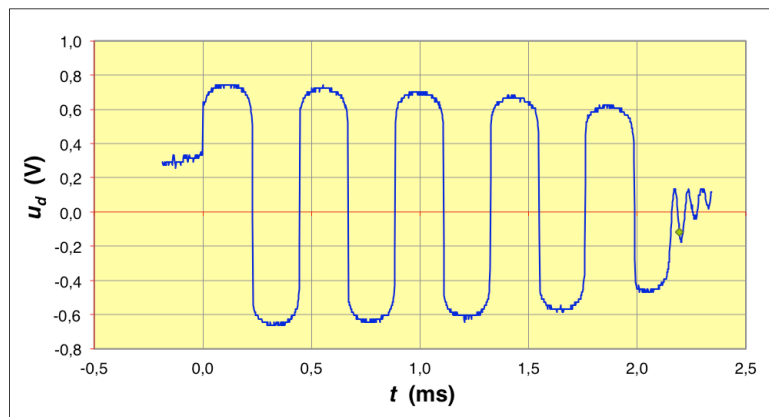
On y mesure $T_0 = 0,822 \pm 0,004$ ms ; avec $L = 49 \pm 2$ mH et $C = 300 \pm 15$ nF, la comparaison avec la valeur théorique $T_0 = 2\pi \sqrt{LC} = 0,760 \pm 0,032$ ms semble une première approximation acceptable.

Les pentes de variation des minimums et des maximums sont comparables ($\approx 4,26 \pm 0,32$ V.ms⁻¹) mais tout de même différentes ; on préfère prendre une référence à l'intersection des droites et considérer l'ensemble des écarts en valeur absolue, ce qui donne : $\approx 4,27 \pm 0,23$ V.ms⁻¹ donc $U_s \approx 0,88 \pm 0,05$ V. Compte tenu de la caractéristique réelle des diodes (résistance et/ou seuil "arrondi"), le seuil expérimental semble en pratique d'autant plus élevé que le courant moyen est important dans le montage étudié ; la valeur obtenue semble tout à fait raisonnable.

En réalité, les extremums ne varient pas de façon tout à fait affine, mais encore moins en exponentielle ; un approfondissement serait utile avec des mesures plus précises.



• Un autre groupe, utilisant du matériel plus récent, effectue en plus une mesure de la tension aux bornes des diodes. On y constate que $U_s \approx 0,6 \text{ V}$ mais que le seuil est supérieur quand les oscillations sont plus importantes ; pour une description en seconde approximation, ceci caractérise la présence d'une résistance des diodes (supplément de tension selon la loi d'Ohm).



Pour $C = 50 \pm 2 \text{ nF}$; $L = 97 \pm 4 \text{ mH}$; $r' = 12,0 \pm 0,5 \Omega$; $r = 50 \pm 2 \Omega$ (générateur) et $r_d \approx 1 \Omega$ à 5Ω (selon le domaine d'utilisation), la résistance du circuit est $R \approx 65 \pm 5 \Omega$; il est souhaitable de proposer une modélisation ne négligeant pas cet effet.

• On reprend donc un modèle avec résistance. L'équation s'écrit : $L C \ddot{u} + R C \dot{u} + u = e - \text{sgn}(\dot{u}) U_s$.

On suppose que la valeur initiale est $u = U_0 > 0$ (constante asymptotique du créneau précédent) et que le générateur passe à une valeur constante E inférieure, tendant à décharger le condensateur ($\dot{u} < 0$). L'inductance impose la continuité du courant $i = C \dot{u}$ donc $\dot{u}(0) = 0$ mais ensuite l'équation décrivant le circuit peut s'écrire : $L C \ddot{u} + R C \dot{u} + u = E + U_s$ ou encore : $\ddot{u} + 2 \alpha \dot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 (E + U_s)$ avec $\alpha = \frac{R}{2L}$.

Compte tenu des conditions initiales, la solution peut s'écrire (avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$) :

$$u = (U_0 - (E + U_s)) e^{-\alpha t} \left[\cos(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t) \right] + (E + U_s).$$

Ceci nécessite toutefois une amplitude $U_{m0} = U_0 - (E + U_s) > 0$ c'est-à-dire $E < U_0 - U_s$.

À la fin d'une demi oscillation, un extremum est atteint avec $\dot{u} = 0$ et $u = (1 + k) (E + U_s) - k U_0 = U_1$, en notant $k = e^{-\alpha T/2}$.

♦ remarque : l'effet du terme $\sin(\omega t)$ est de compenser l'effet de l'exponentielle pour imposer $\dot{u}(0) = 0$.

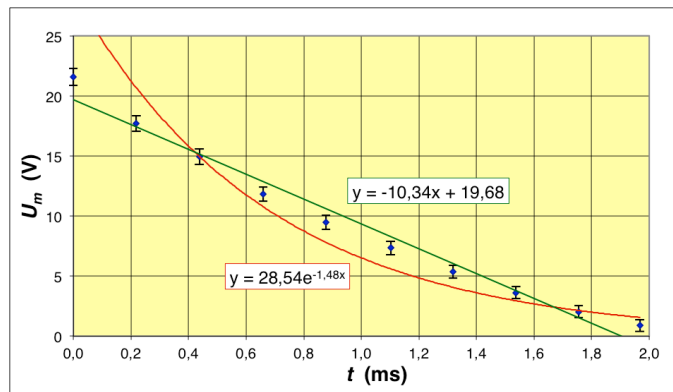
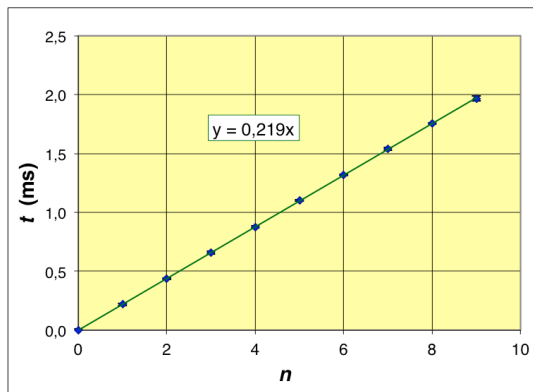
Ensuite l'équation peut s'écrire : $\ddot{u} + 2 \alpha \dot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 (E - U_s)$ et si $U_{m1} = (E - U_s) - U_1 > 0$ c'est-à-dire $E > U_1 + U_s$ la solution est : $u = U_{m1} e^{-\alpha t} \left[\cos(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t) \right] + (E - U_s)$ avec $U_{m1} = k U_{m0} - 2 U_s$.

À la fin de la deuxième demi oscillation, un extremum est atteint avec $u = (1 + k)(E - U_s) - k U_1 = U_2$.

L'oscillation continue alors à condition que $E < U_2 - U_s$ et ainsi de suite. L'amplitude de la troisième demi-oscillation est $U_{m2} = U_2 - (E + U_s) = k U_{m1} - 2 U_s$. Par récurrence, en fonction du nombre n de demi-oscillations, l'amplitude décroît selon : $U_{mn} = k^n U_{m0} - 2 U_s \sum_{i=0}^{n-1} k^i = k^n U_{m0} - 2 U_s \frac{1-k^n}{1-k}$, ce qui peut aussi s'écrire $U_{mn} + a = k^n (U_{m0} + a)$ en notant $a = \frac{2 U_s}{1-k}$.

Dès qu'un extremum intervient dans l'intervalle $E \pm U_s$ les diodes restent bloquées et les oscillations cessent.

• On peut alors déterminer $T = 0,438 \pm 0,003$ ms ; les valeurs théoriques donnent $\alpha = \frac{R}{2L} = 334 \pm 26$ s⁻¹ ; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = (14,4 \pm 0,8) \cdot 10^3$ rad.s⁻¹ ; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \approx \omega_0$ (on a volontairement minimisé l'effet de R) ; $T \approx T_0 = 0,438 \pm 0,024$ ms (parfaitement compatible).

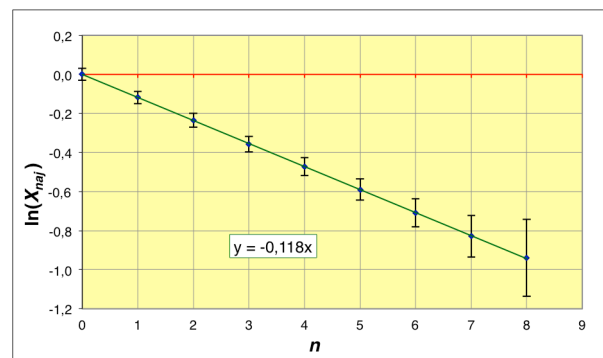
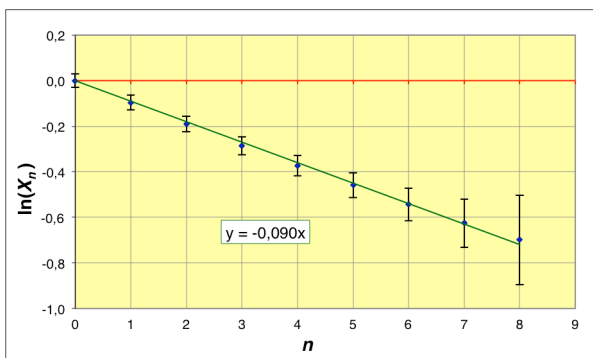


En utilisant la même méthode que pour l'exemple précédent, la décroissance de l'amplitude des oscillations présente les mêmes caractéristiques : variation plutôt affine mais pas exactement.

Pour décrire plus précisément cette décroissance de l'amplitude des oscillations, le plus simple est d'étudier l'évolution de l'amplitude par l'écart entre deux extremums successifs : $\Delta U_n = |U_{n+1} - U_n| = (1 + k) U_{mn}$. La variation suit la loi $\Delta U_n + a' = k^n (\Delta U_0 + a')$ avec $a' = 2 U_s \frac{1+k}{1-k}$.

La loi $\ln\left(\frac{\Delta U_n + a'}{\Delta U_0 + a'}\right) = \ln(X_n) = n \ln(k)$ est une variation linéaire, mais la difficulté est que la valeur k cherchée intervient à la fois dans la pente (par $\ln(k) = -\alpha \frac{T}{2}$) et dans le décalage a' .

On peut tester le modèle théorique, qui donne $\ln(k) = -\alpha \frac{T}{2} = -0,073 \pm 0,006$ et pour lequel l'estimation $U_s = 0,60 \pm 0,03$ V (dans la partie où le courant est faible) donne $a' = 2 U_s \frac{1+k}{1-k} = 33 \pm 4$ V.



On obtient effectivement une variation linéaire, donc le principe de la modélisation est bon, mais la pente correspond à $\ln(k) = -0,090 \pm 0,012$ seulement à peu près compatible.

Inversement, on peut ajuster $a' = 20,4 \pm 4,5 \text{ V}$ pour que la pente soit cohérente : $\ln(k) = -0,118 \pm 0,012$. Ceci correspond alors à $\alpha \approx 540 \pm 80 \text{ s}^{-1}$ puis $R \approx 105 \pm 18 \Omega$; seule une erreur dans la détermination de la résistance de la bobine semblerait pouvoir justifier cela (mesure sur une bobine semblable mais différente de celle utilisée ; la résistance des diodes ne peut pas être aussi grande, celle des générateurs est standardisée à 50Ω).

♦ remarque : on pourrait aussi vérifier l'invariance de la pulsation en fonction de l'amortissement ; pour cela, il serait possible de doubler l'amortissement en remplaçant chaque diode par un assemblage de deux diodes en série ; aucun groupe n'a fourni de mesures correspondantes.