RÉGIMES TRANSITOIRES - CIRCUIT RLC - exercices

A. EXERCICE DE BASE

I. Régime propre d'un circuit RLC

1. • On considère le régime propre d'un circuit RLC peu amorti ; indiquer l'expression de la pseudo-période T. Soit T_0 la limite de T quand $R \to 0$; calculer, en fonction de L et C, la valeur maximale de R pour que la quantité $\beta = \frac{T-T_0}{T_0}$ reste inférieure à 10^{-3} .

Données : $L = 1{,}0$ mH ; $C = 1{,}0$ µF .

2. • On appelle “facteur de qualité” d’un circuit RLC la quantité $Q = \frac{L\,\omega_0}{R} = \frac{1}{R\,C\,\omega_0}$. Ce facteur de qualité, d’autant plus grand que la perte d’énergie par effet Joule à chaque période est une faible proportion de l’énergie emmagasinée dans la bobine et le condensateur, caractérise l’acuité de la résonance.

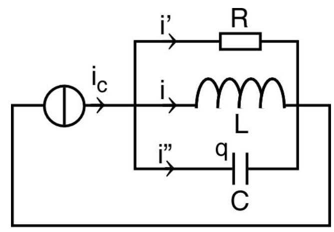
• Calculer les valeurs du décalage relatif β pour les valeurs :

$Q = 10$ (résonance aiguë) ; $Q = 1$; $Q = 0{,}1$ (résonance floue).

II. Réponse à un échelon de courant

• On considère un générateur de courant parfait, de courant “de court-circuit” : $i_c(t) = 0$ pour $t < 0$ puis $i_c(t) = I$ pour $t \geq 0$ (échelon de courant).

1. • On branche le générateur en série avec un montage “RLC” parallèle (la résistance de la bobine est supposée négligeable : inductance parfaite).



a) Quelle est la relation entre i, i', i'' et i_c ? Quelle est la relation entre L, i, R et i' ?

b) Quelle est la relation entre q, C, R et i' ? Quelle est la relation entre i'' et q ?

c) Écrire l'équation différentielle régissant l'évolution de $i(t)$.

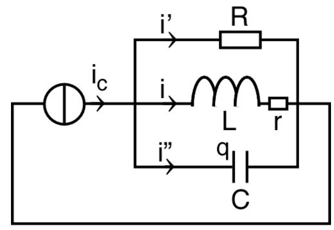
2. • On se place dans le cas où $R < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

a) Exprimer $i(t)$, $i'(t)$ et $i''(t)$ pour $t < 0$ et pour $t \geq 0$.

b) Tracer l'allure des graphes représentant $i(t)$, $i'(t)$ et $i''(t)$.

3. • Étudier de même $i(t)$, $i'(t)$ et $i''(t)$ dans le cas où $R > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

4. • On souhaite maintenant tenir compte de la résistance r de la bobine, conformément au schéma ci-contre.



a) Établir l'équation sur $i(t)$ remplaçant celle de la question (1).

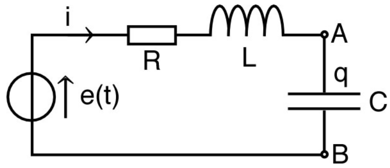
b) Montrer que, dans des conditions à préciser, il peut exister des valeurs I', R', L' et C' utilisées dans le montage (1) afin de redonner la même équation que celle de la question (4).

c) En supposant qu'on choisisse $C' = C$, établir les expressions de R' et L' en fonction de R, r, L et C.

d) Indiquer la forme de la solution $i(t)$. Préciser les conditions de continuité qui permettraient de calculer les constantes d'intégration (sans effectuer le calcul).

e) Existe-t-il une limite sur r pour que ce raisonnement soit valable ?

III. Limite du régime critique



• On considère un générateur de tension parfait, de force électromotrice : $e(t) = E$ pour $t < 0$ puis $e(t) = E'$ pour $t \geq 0$ (échelon de tension).

• Ce générateur étant branché dans un montage “RLC” série ; on étudie l'évolution de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur pour $t > 0$. On note $\alpha = \frac{R}{2L}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

1. • Pour $\alpha > \omega_0$, l'évolution correspond à un régime apériodique : $u(t) = \frac{E-E'}{\mu-\lambda}\left(\mu\, \mathrm{e}^{-\lambda t} - \lambda\, \mathrm{e}^{-\mu t}\right) + E'$ avec $\mu = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ et $\lambda = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ (la démonstration n'est pas demandée).

• Pour $\alpha = \omega_0$, l'évolution correspond à un régime critique ; retrouver l'expression correspondante de $u(t)$ en considérant la limite du cas précédent pour $\alpha \to \omega_0$.

2. • Pour $\alpha < \omega_0$, le régime est pseudopériodique : $u(t) = (E - E')\, \mathrm{e}^{-\alpha t}\left[\cos(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t)\right] + E'$ avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ (la démonstration n'est pas demandée).

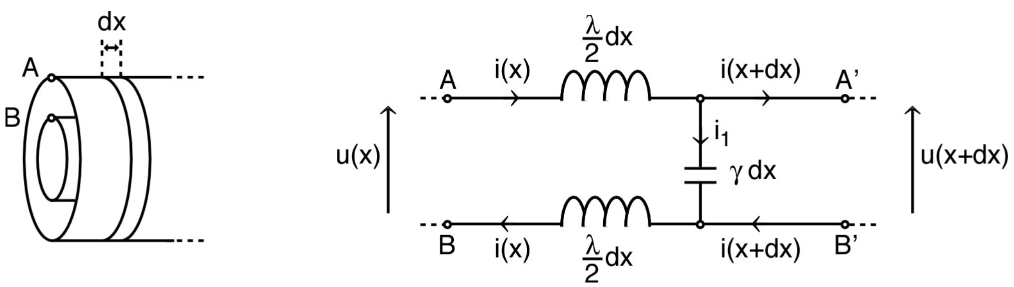
• Pour $\alpha = \omega_0$, retrouver l'expression correspondante de $u(t)$ en considérant la limite du cas précédent pour $\alpha \to \omega_0$.

B. EXERCICES D’APPROFONDISSEMENT

IV. Propagation le long d'un câble coaxial

• Un câble coaxial, formé de deux cylindres coaxiaux, possède une capacité linéique $\gamma = \frac{dC}{dx}$ et une inductance linéique $\lambda = \frac{dL}{dx}$. Si l'espace entre les cylindres est vide, on peut montrer que $\gamma\, \lambda = \varepsilon_0\, \mu_0$; on considère que cette relation est vérifiée.

• Si on néglige la résistance du câble, une tranche de longueur dx est équivalente au circuit suivant :



• On considère un point A sur le conducteur extérieur et un point B sur le conducteur intérieur ; on pose : $u(x) = u_{AB}$ et $u(x + dx) = u_{A'B'}$.

1. • Quel est le courant i_1 traversant la capacité ? En déduire une relation entre $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial i}{\partial x}$.

2. • Calculer $u_{AA'}$ et $u_{BB'}$. En déduire une relation entre $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial i}{\partial t}$.

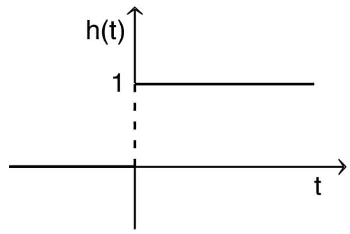
3. • À partir des relations précédentes, montrer que i et u satisfont chacun à une équation différentielle de la forme : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \gamma\, \lambda\, \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$.

4. • Montrer qu'une équation de ce type admet comme solutions des fonctions de la forme : $f_1\left(t - \frac{x}{c}\right)$ et $f_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$; exprimer la constante c en fonction de $\varepsilon_0\, \mu_0$ et interpréter.

V. Transformation de Laplace

• Cet exercice décrit une méthode générale d'étude des régimes transitoires pour les systèmes obéissant à une équation différentielle linéaire à coefficients constants. On considère ici un système initialement "au repos", c'est-à-dire tel que toutes les fonctions qui le décrivent sont nulles pour $t \leq 0$; on suppose en outre qu'elles restent finies pour $t \to \infty$.

• Soit $f(t)$ une telle fonction, on définit une autre fonction par : $\mathcal{F}(p) = \int_0^\infty f(t)\, \mathrm{e}^{-p\,t}\, dt$ où $p \in \mathbb{R}^+$. La fonction $\mathcal{F}(p)$ est appelée “transformée de Laplace” de $f(t)$, ce qui se note de façon formelle : $\mathcal{F} = \mathcal{L}\{f\}$. On admet ici que, dans des conditions assez générales, la transformation de Laplace est biunivoque.

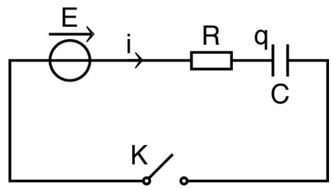


1. a) Montrer que : $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\, du\right\} = \frac{1}{p}\, \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{p}\, \mathcal{F}(p)$.

b) Montrer que : $\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = p\ \mathcal{L}\{f(t)\} = p\ \mathcal{F}(p)$.

c) On nomme “fonction de Heaviside” $h(t)$ la fonction échelon unité. Montrer que : $\mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{p}$ et que : $\mathcal{L}\{h(t-\theta)\} = \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-p\,\theta}$.

d) Calculer $\mathcal{L}\{\phi(t)\}$ pour $\phi(t) = h(t-\theta)\, \mathrm{e}^{-a\,.(t-\theta)}$.

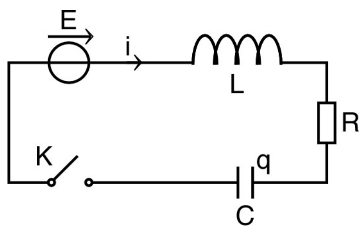


2. • On considère maintenant le circuit ci-contre, dans lequel le condensateur est initialement déchargé.

a) À $t = 0$ on ferme l'interrupteur. Montrer que l'ensemble du générateur et de l'interrupteur équivaut à un générateur de f.e.m. $e(t) = E\ h(t)$.

b) Écrire l'équation intégro-différentielle donnant le courant $i(t)$ en fonction de $e(t)$.

c) En posant : $\mathcal{I}(p) = \mathcal{L}\{i(t)\}$ et $\mathcal{E}(p) = \mathcal{L}\{e(t)\}$, trouver la relation entre $\mathcal{I}(p)$ et $\mathcal{E}(p)$. En déduire $\mathcal{I}(p)$ puis en déduire $i(t)$.



3. • On considère maintenant le circuit ci-contre, dans lequel le condensateur est initialement déchargé.

a) Écrire l'équation intégro-différentielle entre $i(t)$ et $e(t) = E\ h(t)$.

b) En posant : $\mathcal{I}(p) = \mathcal{L}\{i(t)\}$ et $\mathcal{E}(p) = \mathcal{L}\{e(t)\}$, trouver la relation entre $\mathcal{I}(p)$ et $\mathcal{E}(p)$.

c) Décomposer $\mathcal{I}(p)$ en éléments simples en supposant que le polynôme : $p^2 + \frac{R}{L}\, p + \frac{1}{L\,C}$ admette deux racines distinctes ω' et ω'' , réelles ou imaginaires (on omet le régime d'amortissement critique).

d) Discuter qualitativement la forme des solutions $i(t)$ correspondantes (il n'est pas nécessaire d'expliciter complètement les calculs).