EM I - CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

1. Répartition de la charge ; densité de charge

• La matière est formée de “particules élémentaires” dont l’une des propriétés est l’interaction électrique, caractérisée par deux types de charges (+ et –).

Les charges électriques des particules élémentaires sont quantifiées : toutes celles observées ont des charges multiples de $|q_e| = 1{,}602176634.10^{-19}$ C , valeur considérée comme exacte depuis mai 2019 (précision relative 10^{-14}) ; l'unité de courant électrique s'en déduit de fait d'après l'unité de temps.

• Vu les très faibles dimensions et charges des particules élémentaires, les expériences macroscopiques sont insensibles à la quantification de la charge.

Il est alors pratique de décrire la “concentration” des charges élémentaires par une densité de charge :

◊ volumique : $\rho = \frac{dQ}{d\tau}$, telle que $Q = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \, d\tau$;

◊ ou surfacique : $\sigma = \frac{dQ}{dS}$, telle que $Q = \iint_S \sigma \, dS$;

◊ ou linéique : $\lambda = \frac{dQ}{d\ell}$, telle que $Q = \int_C \lambda \, d\ell$.

🕮 *exercice n° I.*

2. Champ électrostatique

2.1. Définitions et propriétés caractéristiques

• L’interaction électrostatique entre deux charges en A et B (dans le vide) est décrite par la loi de Coulomb : $\vec{F}_{A\to B} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \frac{q_A\,q_B}{r^2}\,\vec{u}_r$, avec $r = AB$, $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{AB}}{r}$ et $\varepsilon_0 = 8{,}8537.10^{-12}\ \mathrm{F.m^{-1}}$ $\left(\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \approx 9.10^9\ \mathrm{N.m^2.C^{-2}} \right)$.

◊ remarque : dans un milieu homogène et isotrope (par exemple dans l'eau), la loi précédente peut se généraliser en décrivant l'effet moyen du milieu par une permittivité diélectrique $\varepsilon = \varepsilon_0\ \varepsilon_r$ où ε_r est un coefficient caractéristique du milieu considéré (par exemple $\varepsilon_r \approx 80$ pour l'eau).

• Si, sans déplacer q_A , on remplace q_B par q'_B , alors cette nouvelle charge est soumise à la force : $\vec{F}'_{A\to B} = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_0}\ \frac{q_A\ q'_B}{r^2}\ \vec{u}_r$.

La quantité : $\vec{E}_A(B) = \frac{\vec{F}_{A\to B}}{q_B} = \frac{\vec{F}'_{A\to B}}{q'_B} = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_0}\ \frac{q_A}{r^2}\ \vec{u}_r$ décrit donc une propriété de l'espace en B, provoquée par l'action de q_A ; cette quantité (vectorielle) est appelée “champ électrostatique” (au point B).

• D'après l'additivité des forces, il y a additivité des vecteurs $\vec{E}$; c'est-à-dire que pour un ensemble de charges ponctuelles q_{A_i} placées en des point A_i , le champ total est : $\vec{E}(B) = \sum \vec{E}_i(B) = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_0}\ \sum \left(\frac{q_{A_i}}{r_i^2}\ \vec{u}_{r_i} \right)$.

Pour une répartition continue de charges (distribution volumique), on peut considérer de même: $d\vec{E}(B) = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_0}\ \frac{dq}{r^2}\ \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_0}\ \frac{\rho}{r^2}\ \vec{u}_r\ d\tau$ (où $d\tau$ est un volume infinitésimal au voisinage de A), puis par intégration sur tous les points A du volume $\mathcal{V}$: $\vec{E}(B) = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_0}\ \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{r^2}\ \vec{u}_r\ d\tau$.

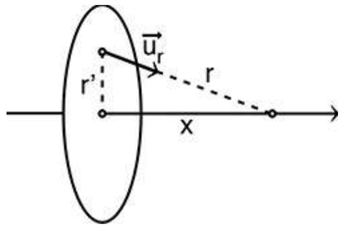
◊ remarque : pour des distributions surfaciques et linéiques, on peut utiliser, de même : $\vec{E}(B) = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_0}\ \iint_S \frac{\sigma}{r^2}\ \vec{u}_r\ dS$ et $\vec{E}(B) = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_0}\ \int_C \frac{\lambda}{r^2}\ \vec{u}_r\ d\ell$.

🕮 *exercice n° II.*

2.2. Exemple de calcul "direct" par intégration

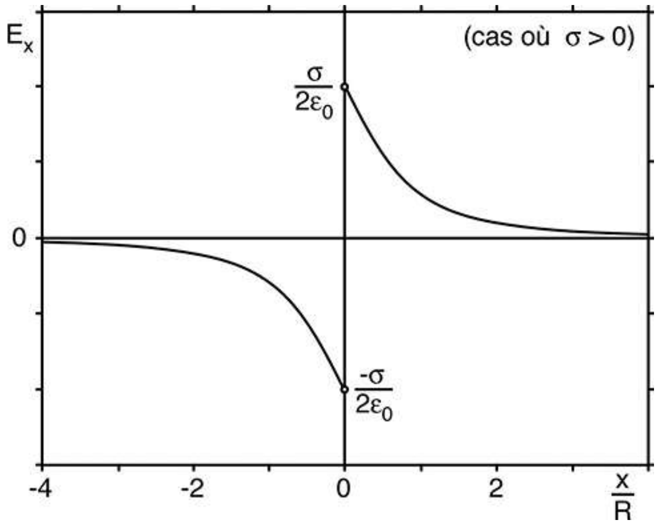
• Le calcul des intégrales vectorielles n'est généralement pas simple, mais il se simplifie quand le dispositif étudié possède des symétries suffisantes.

• Pour le champ **sur l'axe** d'un disque uniformément chargé :
$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{\sigma}{r^2}\,\vec{u}_r\,dS$.



Par symétrie $\vec{E} = E_x\,\vec{u}_x$ car, perpendiculairement à l'axe, les contributions des charges symétriques se compensent. On considère donc : $d^2E_x = \frac{\sigma}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{x}{r^3}\,dS$.

En intégrant cette différentielle (double) sur l'angle θ de rotation autour de l'axe, on obtient la différentielle (simple) : $dE_x = \frac{\sigma\,x}{2\,\varepsilon_0}\,\frac{r'}{(x^2+r'^2)^{3/2}}\,dr'$ d'où on déduit : $E_x = \frac{\sigma\,x}{2\,\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{\sqrt{x^2+r'^2}}\right]_0^R = \frac{\sigma\,x}{2\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$.



☞ remarque : la courbe précédente montre la discontinuité du champ pour la traversée d'une surface chargée ; il en serait de même pour la traversée d'une ligne chargée ; par contre, la traversée d'une distribution volumique de charges ne donne généralement pas de discontinuité du champ.

☞ remarque : la limite du plan infini (pour $R \rightarrow \infty$) correspond à un champ électrique perpendiculaire au plan, de norme $E = \frac{|\sigma|}{2\,\varepsilon_0}$ uniforme puisque tout axe normal <u>semble</u> alors devenu axe de symétrie ; l'étude plus détaillée montre toutefois que cette déduction rapide est à prendre avec précaution car le résultat dépend de la façon de passer à la limite.

🕮 *exercice n° III, IV et V.*

3. Potentiel électrostatique

3.1. Définitions et propriétés caractéristiques

• La somme des vecteurs étant compliquée, on peut utiliser une autre description, équivalente, car $\vec{E}$ dérive d'un potentiel V tel que :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\,\vec{u}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\,\vec{u}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\,\vec{u}_z \quad \text{(en coordonnées cartésiennes).}$$

Inversement, la différence de potentiel entre deux points A et B se calcule par la "circulation" du champ électrostatique sur un trajet quelconque de A à B :

$$U_{AB} = V_A - V_B = \int_B^A dV = \int_B^A \vec{\nabla}V \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_A^B \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell}\ .$$

☞ remarque : l'opérateur gradient, noté par le symbole "vectoriel" $\vec{\nabla}$ (nabla), ne se comporte pas comme un vecteur lors des changements de systèmes de coordonnées ; en particulier, il correspond à :

$\left\{\frac{\partial}{\partial r}\ ,\ \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\ ,\ \frac{\partial}{\partial z}\right\}$ en coordonnées cylindriques ;

$\left\{\frac{\partial}{\partial r}\ ,\ \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\ ,\ \frac{1}{r\,\sin(\theta)}\,\frac{\partial}{\partial \phi}\right\}$ en coordonnées sphériques.

• Pour une charge ponctuelle, on obtient : $V = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q}{r} + V_\infty$ (où on choisit généralement $V_\infty = 0$), correspondant à : $\vec{E}(r,\theta,\phi) = E_r(r,\theta,\phi)\,\vec{u}_r$ (champ radial), avec : $E_r(r,\theta,\phi) = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2} = E_r(r)$.

Pour un ensemble de charges ponctuelles, l'additivité des potentiels se déduit de celle des champs et de la linéarité des dérivations ; l'avantage est qu'on se ramène à une somme algébrique :

$V = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\sum\left(\frac{q_i}{r_i}\right) + V_\infty$ (où on choisit généralement $V_\infty = 0$).

• Pour une distribution volumique de charge : $V = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\iiint_V \frac{\rho}{r}\,d\tau + V_\infty$ (où on choisit généralement $V_\infty = 0$). De même pour une distribution surfacique : $V = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\iint_S \frac{\sigma}{r}\,dS + V_\infty$ ou linéique : $V = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\int_C \frac{\lambda}{r}\,d\ell + V_\infty$.

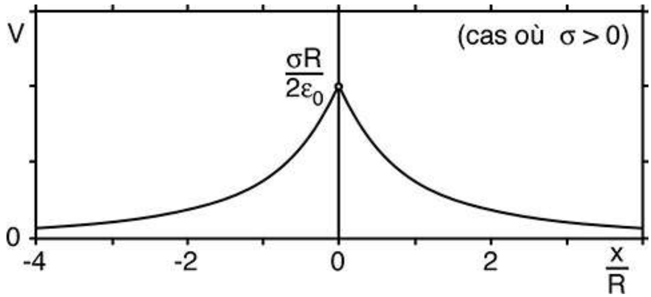
☞ remarque : il faut ne pas confondre une petite variation $dV(M)$ du potentiel créé par une charge q (variation due au déplacement du point M où on calcule le potentiel) et une petite contribution dV au potentiel (contribution due à une charge infinitésimale dq).

🕮 *exercice n° VI.*

3.2. Exemple de calcul par intégration

• Pour le potentiel créé **sur l'axe** par un disque chargé d'une densité surfacique σ uniforme : $d^2V = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{\sigma}{r}\,dS$.

En intégrant sur l'angle θ de rotation autour de l'axe : $dV = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\,\frac{r'}{\sqrt{x^2+r'^2}}\,dr'$; puis en intégrant sur r' : $V = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\,\left[\sqrt{x^2+r'^2}\right]_0^R = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\,\left(\sqrt{x^2+R^2} - |x|\right)$.



☞ remarque : contrairement au champ électrique, le potentiel est continu pour la traversée d'une surface chargée (et de même pour une distribution volumique) ; par contre il est discontinu pour la traversée d'une ligne chargée.

• On en déduit le champ : $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\sigma\, x}{2\, \varepsilon_0} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$.

🕮 *exercice n° VII.*

4. Énergie potentielle d'interaction électrostatique

• La force électrostatique $\vec{F} = q\, \vec{E}$ est dite "conservative", c'est-à-dire qu'elle dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ et que le travail $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{d\ell} = -\Delta\mathcal{E}_p$ est indépendant du trajet suivi de A à B .

L'énergie potentielle électrostatique est $\mathcal{E}_p = q\, V$ et la force est $\vec{F} = -\vec{\nabla}\mathcal{E}_p$.

• Plus précisément, soit l'énergie potentielle d'une charge q_2 placée en M_2 , soumise à l'action d'une charge q_1 placée en M_1 :

$$\mathcal{E}_p = q_2\, V_1(M_2) = \frac{1}{4\pi\, \varepsilon_0} \frac{q_1\, q_2}{r} \text{ avec } r = M_1 M_2 \text{ .}$$

Mais cette expression est symétrique par rapport à q_1 et q_2 ; c'est l'énergie potentielle d'interaction de q_1 et q_2 : $\mathcal{E}_p = q_2\, V_1(M_2) = q_1\, V_2(M_1)$.

On en déduit la loi des actions réciproques pour les forces électrostatiques (valable pour toutes les forces dérivant d'une énergie potentielle d'interaction qui ne dépend que de $\overrightarrow{M_1 M_2}$) : $\vec{F}_{1\to2} = -\vec{\nabla}_2\mathcal{E}_p = -\left(-\vec{\nabla}_1\mathcal{E}_p\right) = -\vec{F}_{2\to1}$.

• L'énergie potentielle d'interaction est analogue pour un ensemble de charges $\{q_i\}$, mais il faut ne pas compter deux fois l'interaction d'un couple (i, j) : $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\, \varepsilon_0} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i\, q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i \left(q_i\, V_{\{j\neq i\}}\right)$; $\vec{F}_{\{j\neq i\}\to i} = -\vec{\nabla}_i \mathcal{E}_p$.

🕮 *exercice n° VIII.*