

## CHAMP ÉLECTROSTATIQUE - corrigé des exercices

### A. EXERCICES DE BASE

#### I. Répartition volumique de charges

- 1.a. • Dans une couche sphérique d'épaisseur infinitésimale  $dr$  la densité  $\rho$  est quasi uniforme ; or le volume de la couche est  $dV = d\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 4\pi r^2 dr$ . Ainsi :  $dQ = \rho dV = 4\pi \rho_0 r^2 \left(1 - a \frac{r^2}{R^2}\right) dr$ .  
 ♦ remarque : on peut aussi retrouver  $dV$  en intégrant sur  $\theta$  et  $\phi$  l'élément de volume infinitésimal à symétrie sphérique  $d\tau = dr r d\theta r \sin(\theta) d\phi$  :  $dV = \left(\int_0^\pi \sin(\theta) d\theta\right) \left(\int_0^{2\pi} d\phi\right) r^2 dr$ .
- 1.b. • La charge totale de la sphère est ainsi :  $Q = \int dQ = 4\pi \rho_0 \cdot \left(\frac{R^3}{3} - a \frac{R^5}{5 R^2}\right) = \frac{4}{3}\pi \rho_0 R^3 \left(1 - \frac{3}{5} a\right)$ .
- 2.a. • La charge volumique moyenne est :  $\rho_m = \frac{Q}{V} = \rho_0 \cdot \left(1 - \frac{3}{5} a\right)$ .
- 2.b. • La "moyenne"  $\frac{1}{R} \int_0^R \rho(r) dr = \frac{\int_0^R \rho(r) dr}{\int_0^R dr} = \rho_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} a\right)$  n'a aucun intérêt car les grandes valeurs du rayon interviennent d'avantage dans le calcul de la charge moyenne (pour un rayon  $r$  donné, la contribution est proportionnelle à  $dV$ ) :  $\rho_m = \frac{\int_0^R \rho(r) r^2 dr}{\int_0^R r^2 dr}$ .

#### II. Électrisation d'une boule

1. • La norme de la force répulsive peut s'écrire :  $F = \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 d^2}$  d'où on déduit :  $Q = 2 d \sqrt{\pi \epsilon_0 F} = 236 \text{ nC}$ .
2. • La charge étant positive (comme l'indique l'énoncé), il s'agit effectivement d'une perte d'électrons ; le nombre d'électrons perdus est :  $N_1 = \frac{Q}{|q_e|} = 1,47 \cdot 10^{12}$ .
3. • Le volume d'une boule est :  $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 33,5 \text{ mm}^3$  ; sa masse est :  $m = \mu V = 298 \text{ mg}$  ; le nombre d'atomes de cuivre est donc :  $N_0 = N_A \frac{m}{M} = 2,83 \cdot 10^{21}$ . Ceci correspond à une proportion d'électrons perdus par atome :  $\frac{N_1}{N_0} = 5,21 \cdot 10^{-10}$  (proportion extrêmement faible).
4. • Le volume d'une couche chargée est :  $V' = 2 r 4\pi R^2 = \frac{6r}{R} V$  ; le nombre d'atomes de cuivre est donc :  $N'_0 = \frac{6r}{R} N_0 = 1,09 \cdot 10^{15}$ . Ceci correspond à une proportion d'électrons perdus par atome :  $\frac{N_1}{N'_0} = 1,4 \cdot 10^{-3}$  (proportion relativement faible).
5. • Si les deux boules perdaient  $N_0$  électrons, leurs charges seraient :  $Q' = N_0 |q_e| = 453 \text{ C}$  et la force répulsive serait :  $F' = \frac{Q'^2}{4\pi \epsilon_0 d^2} = 7,4 \cdot 10^{17} \text{ N}$  (énorme!).

### III. Loi de Coulomb

• La force exercée par une charge  $q_1$  placée en un point  $M_1$ , sur une charge  $q_2$  placée en un point  $M_2$ , est :  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r$  avec  $r = M_1 M_2$  et  $\vec{u}_r = \frac{\vec{M}_1 \vec{M}_2}{r}$ .

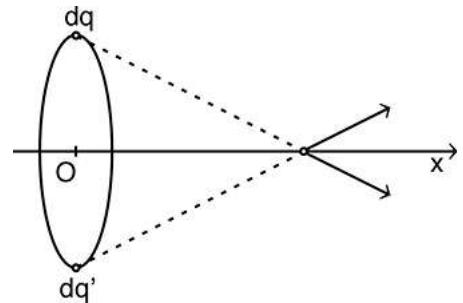
• Pour calculer la force totale causée par l'anneau chargé (d'une densité linéique  $\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$ ), on peut intégrer la force infinitésimale  $d\vec{F}$  créée par un élément linéique infinitésimal  $d\ell$ , de charge  $dq = \lambda d\ell$ .

• La force infinitésimale étant radiale par rapport à la position de la charge  $dq$ , la symétrie impose que la force totale est parallèle à  $Ox$  : toute composante perpendiculaire à  $Ox$  est forcément compensée par l'action de la charge  $dq'$  symétrique de  $dq$  par rapport à l'axe  $Ox$ .

◊ remarque : le schéma correspond au cas où  $Q > 0$ .

• Il suffit de calculer  $\vec{F} = F_x \vec{u}_x$  avec  $F_x = \frac{\lambda q}{4\pi \varepsilon_0} \int \frac{\cos(\theta)}{R^2+x^2} d\ell$  où  $\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$  et  $\int d\ell = 2\pi R$ . On obtient ainsi :  $F_x = \frac{\lambda q}{2 \varepsilon_0} \frac{x R}{(R^2+x^2)^{3/2}} = \frac{Q q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}}$ .

◊ remarque : quand  $x \rightarrow \infty$  on retrouve  $F_x \approx \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{Q q}{x^2}$ , ce qui correspond à négliger l'étendue spatiale de l'anneau en comparaison de la distance de la charge  $q$ .



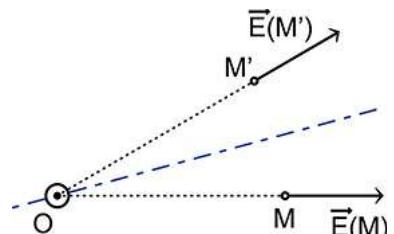
### IV. Champ d'un segment chargé

1.a. • L'effet causé en  $M$  par une charge infinitésimale  $dq$  du fil, placée en  $P$ , est dans la direction de  $\overrightarrow{PM}$ , donc dans le plan défini par  $M$  et l'axe ( $Oz$ ) portant le fil. La somme des contributions des différentes charges du fil est donc aussi dans ce plan, dont  $(\vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est une base.

◊ remarque : on peut aussi considérer que la distribution de charge est invariante par symétrie par rapport au plan défini par  $M$  et le fil ;  $M$  aussi étant invariant dans cette symétrie,  $\vec{E}(M)$  aussi doit être invariant, donc  $E_\theta = 0$ .

• Par ailleurs, la répartition de charge est invariante dans une rotation d'angle  $\theta$  selon l'axe ( $Oz$ ), donc dans cette transformation le champ  $\vec{E}$  doit simplement tourner comme le point  $M$ . Ceci impose que  $E_r(r, \theta, z)$  et  $E_z(r, \theta, z)$  ne dépendent pas de  $\theta$  (l'effet de la rotation se limite à la rotation de  $\vec{u}_r(\theta)$ ).

◊ remarque : soit  $M'$  le point déduit de  $M$  dans une rotation d'axe ( $Oz$ ) et d'angle  $\theta$ , on peut aussi comparer  $\vec{E}(M)$  et  $\vec{E}(M')$  qui doivent être symétriques par rapport au plan bissecteur (le schéma ci-contre n'indique qu'un exemple ; le sens des vecteurs dépend des cas).

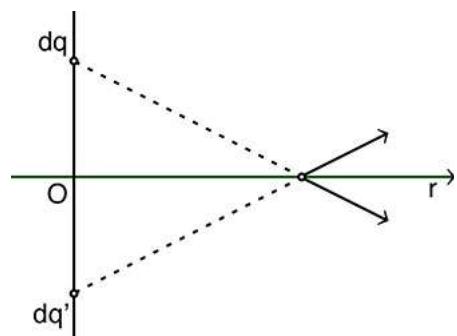


1.b. • En notant  $\rho = PM$  et  $\vec{u}_\rho = \frac{\overrightarrow{PM}}{\rho}$  on obtient :  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int \frac{\lambda}{\rho^2} \vec{u}_\rho d\ell = \frac{\lambda_0}{4\pi \varepsilon_0} \int \frac{1+\alpha \frac{z^2}{L^2}}{r^2+z^2} \vec{u}_\rho dz$ .

2.a. • En se limitant au plan d'équation  $z = 0$ , il n'y a plus de dépendance par rapport à la coordonnée  $z$  du point  $M$ .

• Par ailleurs, la répartition de charges et le point  $M$  sont symétriques par rapport à ce plan, donc le champ  $\vec{E}(M)$  doit l'être aussi ; ainsi :  $\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{u}_r$ .

◊ remarque : on peut aussi considérer que toute composante perpendiculaire à l'axe ( $Or$ ) est forcément compensée par l'action de la charge  $dq'$  symétrique de  $dq$  par rapport à l'axe ( $Or$ ).



2.b. • La composante radiale s'obtient par projection :  $E_r(r) = \vec{E} \cdot \vec{u}_r$ . Avec  $\vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_r = \cos(\varphi) = \frac{r}{\rho}$  on obtient ainsi :  $E_r(r) = \frac{\lambda_0 r}{4\pi \varepsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1+\alpha \frac{z^2}{L^2}}{(r^2+z^2)^{3/2}} dz$ .

2.c. • On peut séparer :  $E_r = \frac{\lambda_0 r}{4\pi \varepsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{(r^2+z^2)^{3/2}} dz + \frac{\lambda_0 r}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\alpha}{L^2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{z^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} dz$  ; il n'y a hélas pas de primitives évidentes.  
• On peut chercher par différentes méthodes (par exemple l'intégration par parties), mais le changement de variables pour la trigonométrie est souvent efficace :

$$\cos(\varphi) = \frac{r}{\rho} ; \tan(\varphi) = \frac{z}{r} ; r^2 + z^2 = r^2 \cdot (1 + \tan^2(\varphi)) = \frac{r^2}{\cos^2(\varphi)} ; dz = \frac{r}{\cos^2(\varphi)} d\varphi ;$$

$$\mathcal{J} = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{(r^2+z^2)^{3/2}} dz = \frac{1}{r^2} \int_{-\arctan(L/2r)}^{\arctan(L/2r)} \cos(\varphi) d\varphi = \frac{1}{r^2} [\sin(\varphi)]_{-\arctan(L/2r)}^{\arctan(L/2r)} = \frac{2}{r^2} \frac{L}{\sqrt{4r^2+L^2}}.$$

• Certains cas peuvent aussi se résoudre par la trigonométrie hyperbolique :

$$\sinh(\xi) = \frac{z}{r} ; r^2 + z^2 = r^2 \cdot (1 + \sinh^2(\xi)) = r^2 \cdot \cosh^2(\xi) ; dz = r \cosh(\xi) d\xi ;$$

$$\mathcal{J} = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{z^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} dz = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} dz - r^2 \mathcal{J} ;$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} dz = \int_{-\text{arsinh}(L/2r)}^{\text{arsinh}(L/2r)} d\xi = 2 \text{arsinh}\left(\frac{L}{2r}\right) ; \mathcal{J} = 2 \text{arsinh}\left(\frac{L}{2r}\right) - 2 \frac{L}{\sqrt{4r^2+L^2}} ;$$

$$E_r = \frac{\lambda_0}{2\pi \varepsilon_0 r} \left(1 - \alpha \frac{r^2}{L^2}\right) \frac{L}{\sqrt{4r^2+L^2}} + \frac{\lambda_0 r}{2\pi \varepsilon_0 L^2} \alpha \text{arsinh}\left(\frac{L}{2r}\right).$$

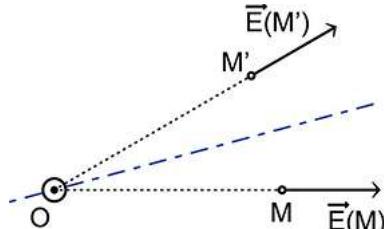
◊ remarque : le plus important n'est pas de savoir ainsi exprimer littéralement le résultat, mais de savoir écrire quelles intégrales il faut calculer, quitte à terminer la résolution (éventuellement numériquement) à l'aide d'un ordinateur.

## V. Champ d'un disque chargé

1.a. • Pour tout point  $M$  hors de l'axe ( $Ox$ ), le point  $M$  et l'axe déterminent un plan ( $M, \vec{u}_r, \vec{u}_x$ ). La répartition des charges est symétrique par rapport à ce plan. Le champ en  $M$  doit donc être invariant dans cette symétrie, donc parallèle à ce plan :  $\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, x) \vec{u}_r + E_x(r, \theta, x) \vec{u}_x$ .

• Par ailleurs, la répartition de charge est invariante dans une rotation d'angle  $\theta$  selon l'axe ( $Ox$ ), donc dans cette transformation le champ  $\vec{E}$  doit simplement tourner comme le point  $M$ . Ceci impose que  $E_r(r, \theta, x)$  et  $E_x(r, \theta, x)$  ne dépendent pas de  $\theta$  (l'effet de la rotation se limite à la rotation de  $\vec{u}_r(\theta)$ ).

◊ remarque : soit  $M'$  le point déduit de  $M$  dans une rotation d'axe ( $Ox$ ) et d'angle  $\theta$ , on peut aussi comparer  $\vec{E}(M)$  et  $\vec{E}(M')$  qui doivent être symétriques par rapport au plan bissecteur (le schéma ci-contre n'indique qu'un exemple ; le sens des vecteurs dépend des cas).



1.b. • La difficulté pour calculer en coordonnées polaires tient au fait que  $P$  (angle  $\theta$ ) portant des charges n'est en général pas dans le plan défini par  $M$  et l'axe ( $Ox$ ), choisi comme origine des angles.

• On peut utiliser des coordonnées intermédiaires cartésiennes ( $Oy$ ) vers le haut et ( $Oz$ ) vers l'avant :  $M[x, y = r, z = 0]$  ;  $P[x' = 0, y' = r' \cos(\theta), z' = r' \sin(\theta)]$ . Ceci permet de calculer  $\rho = PM$  et  $\vec{u}_\rho = \frac{\vec{PM}}{PM}$  puis d'intégrer les charges sur  $dS = r' d\theta dr'$  :  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \iint \frac{\sigma}{\rho^2} \vec{u}_\rho dS$ .

2.a. • En se limitant à l'axe ( $Ox$ ), il n'y a plus de dépendance par rapport à la coordonnée  $r$  du point  $M$  puisqu'elle reste nulle.  
• Par ailleurs, la répartition de charges et le point  $M$  sont symétriques par rapport à l'axe, donc le champ  $\vec{E}(M)$  doit l'être aussi ; ainsi :  $\vec{E}(M) = E_x(x) \vec{u}_x$ .

2.b. • Puisque dans ce cas  $\rho^2 = r'^2 + x^2$  ne dépend plus de  $\theta$ , on obtient :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \iint \frac{\sigma}{\rho^2} \vec{u}_\rho dS = \frac{\sigma_0}{4\pi \varepsilon_0 R} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{R-2r'}{\rho^2} \vec{u}_\rho r' dr' = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0 R} \int_0^R \frac{R-2r'}{\rho^2} \vec{u}_\rho r' dr'.$$

- La composante axiale s'obtient par projection :  $E_x(x) = \vec{E} \cdot \vec{u}_x$ . Avec  $\vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_x = \cos(\varphi) = \frac{r'}{\rho}$  on obtient ainsi :  $E_x(x) = \frac{\sigma_0}{2 \varepsilon_0 R} \int_0^R \frac{r'^2}{\rho^3} r'^2 dr'$ .
- 2.c.
- On peut séparer :  $E_x = \frac{\sigma_0}{2 \varepsilon_0} \int_0^R \frac{r'^2}{(r'^2+x^2)^{3/2}} dr' - \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 R} \int_0^R \frac{r'^3}{(r'^2+x^2)^{3/2}} dr'$  ; il n'y a hélas pas de primitives évidentes.
  - On peut chercher par différentes méthodes ; par exemple l'intégration par parties permet de simplifier la première intégrale :  $\mathcal{I} = \int_0^R \frac{r'^2}{(r'^2+x^2)^{3/2}} dr' = \int_0^R \frac{1}{\sqrt{r'^2+x^2}} dr' - \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$ .
  - Un changement de variables pour la trigonométrie hyperbolique est ensuite efficace :
$$\sinh(\xi) = \frac{r'}{x} ; r'^2 + x^2 = x^2 \cdot (1 + \sinh^2(\xi)) = x^2 \cosh^2(\xi) ; dr' = x \cosh(\xi) d\xi ;$$

$$\mathcal{J}' = \int_0^R \frac{1}{\sqrt{r'^2+x^2}} dr' = \int_0^{\text{arsinh}(R/x)} d\xi = \text{arsinh}\left(\frac{R}{x}\right).$$
  - L'autre terme se simplifie par changement de variable :
$$r'^2 + x^2 = \rho^2 ; r' dr' = \rho d\rho ;$$

$$\mathcal{J} = \int_0^R \frac{r'^3}{(r'^2+x^2)^{3/2}} dr' = \int_0^R \frac{\rho^2}{\rho^3} \rho' dr' - x^2 \int_0^R \frac{1}{\rho^3} \rho' dr' = \int_{\sqrt{x^2}}^{\sqrt{R^2+x^2}} d\rho - x^2 \int_{\sqrt{x^2}}^{\sqrt{R^2+x^2}} \frac{1}{\rho^2} d\rho ;$$

$$\mathcal{J} = (\sqrt{R^2+x^2} - \sqrt{x^2}) + x^2 \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2}} \right) ;$$

$$E_x = \frac{\sigma_0}{2 \varepsilon_0} \text{arsinh}\left(\frac{R}{x}\right) - \frac{\sigma_0}{2 \varepsilon_0 R} \left( \frac{3 R^2 + 4 x^2}{\sqrt{R^2+x^2}} - \frac{4 x^2}{\sqrt{x^2}} \right).$$
- ◊ remarque : le plus important n'est pas de savoir ainsi exprimer littéralement le résultat, mais de savoir écrire quelles intégrales il faut calculer, quitte à terminer la résolution (éventuellement numériquement) à l'aide d'un ordinateur.
- ## VI. Gradient par rapport aux coordonnées d'un point
- Par définition :  $dV(M_1, M_2) = \vec{\nabla}_1 V \cdot d\overrightarrow{OM}_1 + \vec{\nabla}_2 V \cdot d\overrightarrow{OM}_2$ . Mais puisque  $V(M_1, M_2) = V(r)$  on peut écrire :  $dV = dV(r) = \frac{\partial V}{\partial r} dr = \frac{\partial V}{\partial r} [\vec{\nabla}_1 r \cdot d\overrightarrow{OM}_1 + \vec{\nabla}_2 r \cdot d\overrightarrow{OM}_2]$ .
  - Ce dernier terme peut être calculé avec :  $r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$  d'où on déduit :
$$2r dr = 2(x_1 - x_2) dx_1 + 2(y_1 - y_2) dy_1 + 2(z_1 - z_2) dz_1 \dots$$

$$+ 2(x_2 - x_1) dx_2 + 2(y_2 - y_1) dy_2 + 2(z_2 - z_1) dz_2 .$$
  - Par comparaison, on en déduit (en coordonnées cartésiennes) :  $\vec{\nabla}_1 r = -\frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{r}$  (vecteur unitaire orienté de  $M_2$  vers  $M_1$ ) et de même :  $\vec{\nabla}_2 r = -\frac{\overrightarrow{M_2 M_1}}{r}$  (vecteur opposé au précédent).
  - Finalement :  $\vec{\nabla}_1 V = -\frac{\partial V}{\partial r} \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{r} = -\vec{\nabla}_2 V$ .
- ## VII. Champ d'un segment uniformément chargé
1.
    - Les segments infinitésimaux  $d\ell$  et  $d\ell'$  sont "vus" du point  $M$  dans la même direction (on les considère comme quasi-ponctuels) et du même côté ; par ailleurs leurs charges sont de même signe ; ils créent donc des champs qui ne peuvent éventuellement différer que par leur norme.
    - Le champ créé par  $d\ell$  a pour mesure algébrique (selon la direction orientée de  $d\ell$  vers  $M$ ) :
$$dE = \frac{\lambda d\ell}{4\pi \varepsilon_0 \left(\frac{r}{\cos(\theta)}\right)^2} = \frac{\lambda \cos^2(\theta) d\ell}{4\pi \varepsilon_0 r^2} .$$
    - Le champ créé par  $d\ell'$  a pour mesure algébrique :  $dE' = \frac{\lambda d\ell'}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$ . Mais  $d\ell' = d\ell \cos^2(\theta)$  (il faut multiplier  $d\ell$  par  $\cos(\theta)$  pour projeter sur la direction tangente au cercle qui passe par la position de  $d\ell$ , puis multiplier par  $\cos(\theta)$  pour tenir compte du rapport des rayons). Par conséquent  $dE = dE'$  et les champs infinitésimaux sont égaux.
  2.
    - D'après la symétrie de l'arc  $\widehat{AmB}$ , le champ qu'il crée est parallèle à la bissectrice de l'angle  $\widehat{AMB}$  (toute contribution à droite de cette bissectrice est compensée par une contribution de l'élément symétrique). Compte tenu de la question (1), il en est de même pour le champ créé par le segment  $F'F$ .

- Considérons l'intersection d'une surface équipotentielle avec le plan de la figure : la courbe équipotentielle ainsi obtenue est perpendiculaire au champ, donc perpendiculaire à la bissectrice de l'angle  $\widehat{F'MF}$ . Par suite la courbe équipotentielle est une ellipse de foyers  $F'$  et  $F$  ; les surfaces équipotielles sont donc des ellipsoïdes de révolution, de foyers  $F'$  et  $F$ .

3. • La contribution de  $d\ell$  au potentiel en  $M$  est :  $dV = \frac{\lambda \cos(\theta) d\ell}{4\pi \varepsilon_0 r}$  donc :

$$V = \frac{\lambda}{4\pi \varepsilon_0 r} \int \cos(\theta) d\ell = \frac{\lambda}{4\pi \varepsilon_0 r} \int \frac{d\ell'}{\cos(\theta)} = \frac{\lambda}{4\pi \varepsilon_0} \int \frac{d\theta}{\cos(\theta)}.$$

◊ remarque :  $d\ell'$  ne donne pas la même contribution au potentiel que  $d\ell$ , donc ne peut pas être utilisé directement pour calculer  $V$  (contrairement au cas du champ), mais cela n'interdit pas d'utiliser  $d\ell'$  dans le calcul (il s'agit uniquement d'un changement de variable).

- La valeur du potentiel sur une **équipotentielle** peut être calculé en n'importe lequel de ses points, en particulier en un point de la médiatrice de  $F'F$ . En notant  $\alpha = \arcsin\left(\frac{c}{a}\right)$  l'angle sous lequel on "voit" une moitié de  $F'F$  depuis le point  $M$  de la médiatrice, on obtient :  $V = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\cos(\theta)}$ .

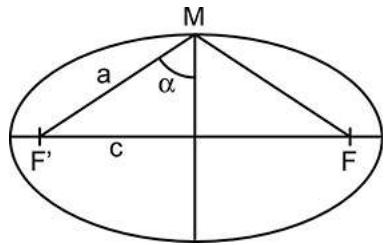
- On peut alors écrire, en posant  $u = \sin(\theta)$  :

$$\int_0^\alpha \frac{d\theta}{\cos(\theta)} = \int_0^{c/a} \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \int_0^{c/a} \frac{du}{1-u} + \frac{1}{2} \int_0^{c/a} \frac{du}{1+u} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{a+c}{a-c}\right)$$

et par suite :  $V = \frac{\lambda}{4\pi \varepsilon_0} \ln\left(\frac{a+c}{a-c}\right)$ .

◊ remarque : on peut aussi calculer le potentiel en un sommet ; on obtient alors :

$$V = \frac{\lambda}{4\pi \varepsilon_0} \int_{-c}^c \frac{d\ell}{a-\ell} = \frac{\lambda}{4\pi \varepsilon_0} \ln\left(\frac{a+c}{a-c}\right).$$



## VIII. Identité de Gauss

- Les potentiels sont :  $V_i = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}}$  puis dans le second cas :  $V'_i = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q'_j}{r_{ij}}$ .
- Par suite :  $\sum q_i V'_i = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i q'_j}{r_{ij}} = \sum q'_i V_i$ .

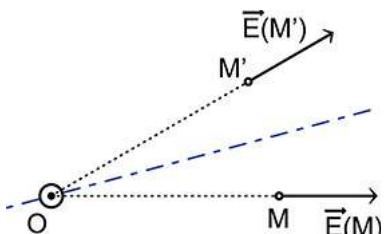
## B. EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

### IX. Champ d'un disque chargé

- 1.a. • Pour tout point  $M$  hors de l'axe ( $Ox$ ), le point  $M$  et l'axe déterminent un plan ( $M$ ,  $\vec{u}_r$ ,  $\vec{u}_x$ ). La répartition des charges est symétrique par rapport à ce plan. Le champ en  $M$  doit donc être invariant dans cette symétrie, donc parallèle à ce plan :  $\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, x) \vec{u}_r + E_x(r, \theta, x) \vec{u}_x$ .

- Par ailleurs, la répartition de charge est invariante dans une rotation d'angle  $\theta$  selon l'axe ( $Ox$ ), donc dans cette transformation le champ  $\vec{E}$  doit simplement tourner comme le point  $M$ . Ceci impose que  $E_r(r, \theta, x)$  et  $E_x(r, \theta, x)$  ne dépendent pas de  $\theta$  (l'effet de la rotation se limite à la rotation de  $\vec{u}_r(\theta)$ ).

◊ remarque : soit  $M'$  le point déduit de  $M$  dans une rotation d'axe ( $Ox$ ) et d'angle  $\theta$ , on peut aussi comparer  $\vec{E}(M)$  et  $\vec{E}(M')$  qui doivent être symétriques par rapport au plan bissecteur (le schéma ci-contre n'indique qu'un exemple ; le sens des vecteurs dépend des cas).

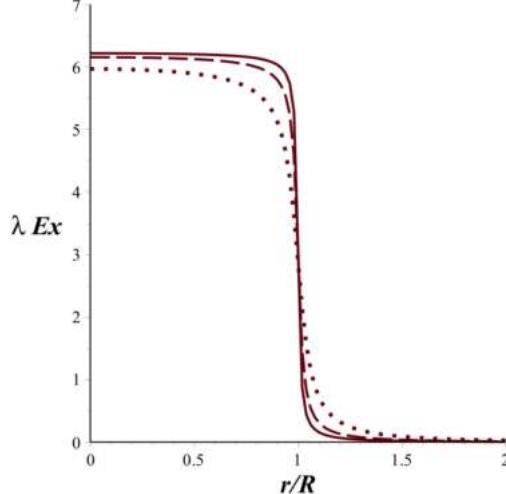


- 1.b. • La difficulté pour calculer en coordonnées polaires tient au fait que  $P$  (angle  $\theta$ ) portant des charges n'est en général pas dans le plan défini par  $M$  et l'axe ( $Ox$ ), choisi comme origine des angles.

- On peut utiliser des coordonnées intermédiaires cartésiennes ( $Oy$ ) vers le haut et ( $Oz$ ) vers l'avant :  $M[x, y = r, z = 0]$  ;  $P[x' = 0, y' = r' \cos(\theta), z' = r' \sin(\theta)]$ . Ceci permet de calculer  $\rho = PM$  et  $\vec{u}_\rho = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$  puis d'intégrer les charges sur  $dS = r' d\theta dr' : \vec{E} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \iint \frac{\sigma}{\rho^2} \vec{u}_\rho dS$ .

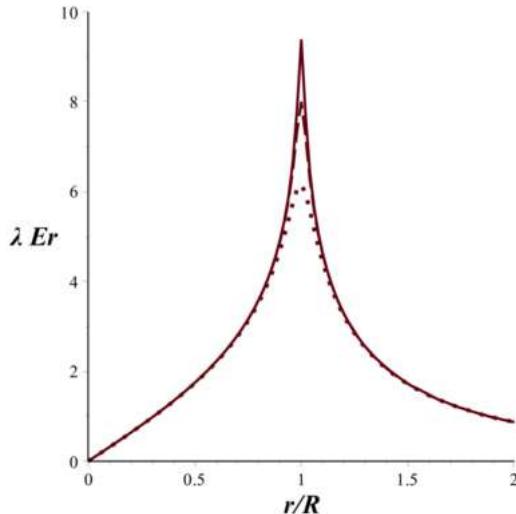
- On obtient ainsi :  $E_x = \frac{\sigma}{4\pi \varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R \frac{x r'}{(x^2 + [r - r' \cos(\theta)]^2 + [r' \sin(\theta)]^2)^{3/2}} dr' \right) d\theta ;$   
 $E_r = \frac{\sigma}{4\pi \varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R \frac{[r - r' \cos(\theta)] r'}{(x^2 + [r - r' \cos(\theta)]^2 + [r' \sin(\theta)]^2)^{3/2}} dr' \right) d\theta .$

- 2.a. • L'intégration numérique donne pour  $E_x$  les graphiques suivants (avec  $\lambda = \frac{4\pi \varepsilon_0}{\sigma}$ ).



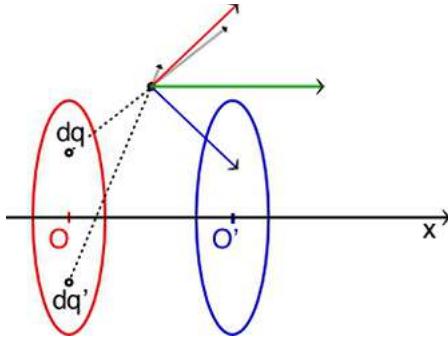
- Au plus près du disque ( $\frac{x}{R} = 0,01$  en trait plein) la composante axiale du champ est quasi-uniforme à proximité ( $r < R$ ) et quasi-nulle à l'écart ( $r > R$ ). Cette caractéristique s'atténue en s'éloignant du disque (tirets, puis pointillés), mais reste vérifiée en bonne première approximation.
- La modélisation “classique” semble donc tout à fait valable à ce niveau.

- 2.b. • L'intégration numérique donne pour  $E_r$  les graphiques suivants.



- La composante radiale est surtout importante au “voisinage” du bord, comme le suggère la modélisation “classique”, mais n'est par contre pas du tout négligeable dès qu'on s'écarte de l'axe ( $\approx 30\%$  pour  $r \approx \frac{R}{2}$ ). Qui plus est, ce problème ne diminue pas au plus près du disque : il est quasi-indépendant de  $x$  (sauf au voisinage du bord, où il s'accentue pour  $x$  faible).
- La modélisation “classique” semble donc très approximative à ce niveau.

3. • Dans un tel dispositif, la symétrie fait que les composantes radiales se compensent dans le plan médian, donnant un champ parallèle à l'axe et quasi uniforme.



- Mais en outre, puisque dans cette zone les composantes radiales ne dépendent pratiquement pas de  $x$ , le champ y reste quasi uniforme presque partout (sauf aux bords).
- La modélisation “classique”, bien que n'étant qu'une grossière approximation pour le cas d'une plaque, est une bonne approximation pour ce cas ; c'est ce qui en justifie l'utilisation, mais il est vrai que cela nécessite quelques précisions si on veut éviter une mauvaise compréhension et de regrettables illusions.  
◊ remarque : en pratique, le modèle utilisé pour construire un champ uniforme est plus souvent celui de condensateur plan, dont les plaques sont conductrices ; cela implique un champ réellement axial à la surface des armatures (une composante radiale provoquerait des déplacements des charges), donc la répartition des charges ne peut pas être exactement uniforme (mais c'est un autre problème).

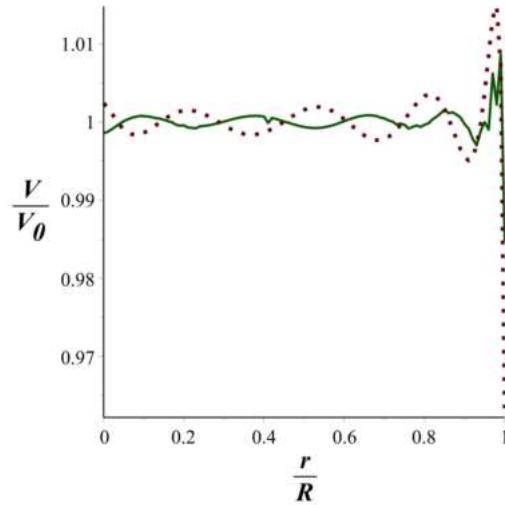
## X. Champ d'un disque chargé

- 1.a. • Le champ électrique (selon lequel décroît le potentiel) est dans l'orientation “fuyant” la zone chargée. Si la répartition était uniforme, l'orientation aux bords du disque ne pourrait être que décalée en s'éloignant de l'axe. Cela impliquerait une composante radiale du champ, qui provoquerait un déplacement de charge vers la périphérie du disque (conducteur). Pour obtenir une situation stable, la densité est plus grande au bord, ce qui permet un champ électrique normal et un potentiel de surface uniforme (le conducteur doit être équipotentiel). L'invariance par rotation axiale impose que  $\sigma = \sigma(r')$  ne dépend pas de  $\theta$ .

- 1.b. • De même le potentiel ne dépend pas de  $\theta$  :  $V = V(r, x)$ .
- 1.c. • La difficulté pour calculer en coordonnées polaires tient au fait que  $P$  (angle  $\theta$ ) portant des charges n'est en général pas dans le plan défini par  $M$  et l'axe ( $Ox$ ), choisi comme origine des angles.  
• On peut utiliser des coordonnées intermédiaires cartésiennes ( $Oy$ ) vers le haut et ( $Oz$ ) vers l'avant :  $M[x, y = r, z = 0]$  ;  $P[x' = 0, y' = r' \cos(\theta), z' = r' \sin(\theta)]$ . Ceci permet de calculer  $\rho = PM$  et  $\vec{u}_\rho = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$  puis d'intégrer les charges sur  $dS = r' d\theta dr'$  :
- $$V = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \iint \frac{\sigma}{\rho} dS = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R \frac{\sigma(r') r'}{\sqrt{x^2 + [r - r' \cos(\theta)]^2 + [r' \sin(\theta)]^2}} dr' \right) d\theta.$$
- En particulier en surface du disque :  $V = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R \frac{\sigma(r') r'}{\sqrt{[r - r' \cos(\theta)]^2 + [r' \sin(\theta)]^2}} dr' \right) d\theta$ .

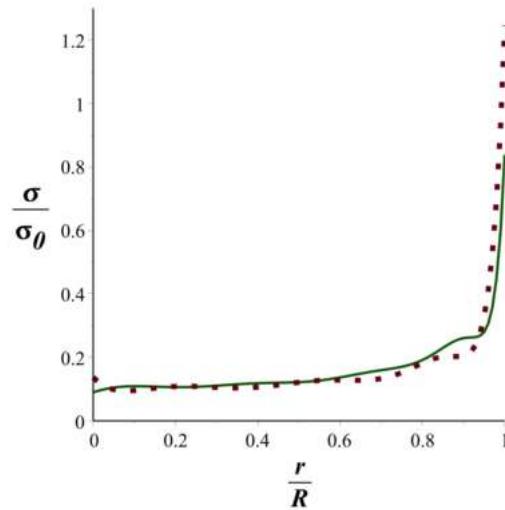
- 2.a. • En utilisant  $\frac{\sigma(r)}{4\pi \epsilon_0} = c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + \dots$  le développement du potentiel se ramène aux intégrales :  $I_n(r) = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R \frac{(r')^{n+1}}{\sqrt{[r - r' \cos(\theta)]^2 + [r' \sin(\theta)]^2}} dr' \right) d\theta$ .
- 2.b. • On calcule numériquement  $V(r_i)$  pour une suite régulière de  $r_i$  dans l'intervalle  $[0 ; R]$ .  
• L'ajustement de  $V = Cste$  peut se faire en minimisant  $\sum_i [V(r_i) - V_0]^2$  (estimation de l'intégrale correspondante) où  $V_0$  est une valeur constante supposée imposée.

- La série de termes converge hélas mal ; le développement à l'ordre 23, représenté en valeur relative  $\frac{V(r)}{V_0}$  montre une concordance de  $V = Cste$  avec une précision globale meilleure que 0,5 % (pour préciser l'efficacité de la méthode, l'ajustement limité à l'ordre 15 est reporté en pointillés ; un peu moins bon, mais déjà correct).



On y voit que c'est la zone périphérique (où s'accumulent le plus de charges) qui est la plus difficile à décrire. Il y apparaît qu'il serait vain de poursuivre à des ordres plus élevés car les fluctuations aléatoires associées aux arrondis dans les intégrations numériques compliquées deviennent rédhibitoires.  
◊ remarque : au delà, le minimiseur peut alors converger (selon les conditions initiales de l'ajustement) vers différentes solutions dont certaines sont visiblement physiquement absurdes (par exemple avec plusieurs zones comportant des charges de signes contraires).

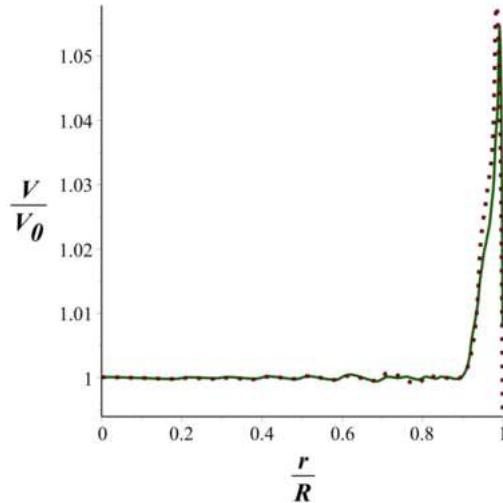
- 2.c. • On obtient ainsi pour  $\sigma(r)$  la courbe suivante (le développement limité à l'ordre 15, en pointillés, donne une répartition comparable).



- Bien que les courbes obtenues présentent des variations locales dues à l'ajustement de précision modeste, il y apparaît clairement que la distribution des charges est loin d'être uniforme : l'éventuelle modélisation par un disque uniformément chargé semblerait un peu fantaisiste.  
◊ remarque : dans une boule, le théorème de Gauss aboutit à une charge totalement déplacée en surface ; ici la répartition est "seulement" très piquée en périphérie car une partie du flux électrostatique "sort du plan du disque par les côtés".

- 3.a. • En utilisant  $\frac{\sigma(r)}{4\pi \varepsilon_0} = \sum_n c_n H(r - r_n)$  le développement du potentiel se ramène aux intégrales :
- $$J_n(r) = \int_0^{2\pi} \left( \int_{r_n}^R \frac{r'}{\sqrt{[r-r'\cos(\theta)]^2 + [r'\sin(\theta)]^2}} dr' \right) d\theta .$$

- 3.b. ♦ remarque : connaissant l'allure de la répartition  $\sigma(r)$  on choisit un pas de calcul plus fin en périphérie ; les points où sont calculées les valeurs  $V(r)$  pour l'ajustement doivent être en outre plus resserées que ceux du découpage  $r_k$ .
- La série de termes donne une description plus efficace ; pour une partition en 24 intervalles, la représentation en valeur relative  $\frac{V(r)}{V_0}$  montre une concordance de  $V = Cste$  avec une précision globale quasi parfaite jusqu'à  $\frac{r}{R} = 0,9$  (pour préciser l'efficacité de la méthode, l'ajustement pour une partition en 18 intervalles est reporté en pointillés ; à peine moins bon).

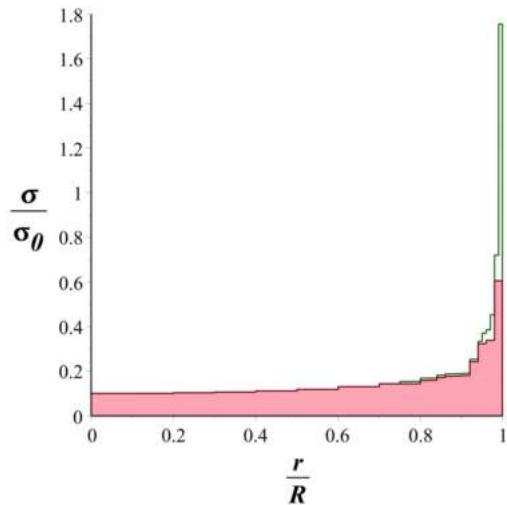


On y voit que c'est ici encore la zone périphérique (où s'accumulent le plus de charges) qui est la plus difficile à décrire (il serait vain de poursuivre avec un découpage plus fin car les fluctuations aléatoires associées aux arrondis dans les intégrations numériques, même si elles perturbent moins, deviennent rédhibitoires).

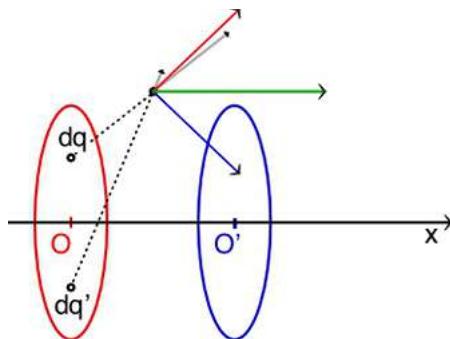
Principalement, le minimiseur peut ici converger (selon les conditions initiales de l'ajustement) vers des solutions légèrement différentes (près de la périphérie) mais toujours très comparables (on y gagne un peu en précision et énormément de "stabilité", ce qui est fondamental pour que la modélisation soit convaincante).

- 3.c. • On obtient alors pour  $\sigma(r)$  la courbe suivante (l'ajustement pour une partition en 18 intervalles, avec un remplissage rouge, donne une répartition comparable).

Cette représentation confirme globalement celle obtenue par l'autre méthode. Il apparaît clairement que la distribution de charges est très piquée en périphérie.



4. • Dans un tel dispositif, la symétrie fait que les composantes radiales se compensent dans le plan médian, donnant un champ parallèle à l'axe. Chacun des disques est ainsi équipotentiel.



- De ce fait, la répartition des charges est naturellement quasi uniforme : les charges de même signe se repoussent ; tout en étant au même potentiel, c'est ainsi qu'elles sont "en moyenne" le plus écartées les unes des autres (une accumulation dans une zone y causerait une augmentation du potentiel). Ceci donne un champ quasi uniforme.
- La modélisation "classique" par une répartition uniforme des charges, bien que n'étant qu'une grossière approximation pour le cas d'une plaque, est une bonne approximation pour ce cas ; c'est ce qui en justifie l'utilisation, mais il est vrai que cela nécessite quelques précisions si on veut éviter une mauvaise compréhension et de regrettables illusions.