CHAMP ÉLECTROSTATIQUE - exercices

A. EXERCICES DE BASE

I. Répartition volumique de charges

• Une boule B de centre O et de rayon R est chargée d'une densité volumique ne dépendant que de la distance au centre r : $\rho(r) = \rho_0 . \left(1 - a \frac{r^2}{R^2}\right)$ où ρ_0 et a sont deux constantes.

1. a) Quelle est la charge infinitésimale dQ comprise entre deux sphères centrées en O et dont les rayons sont r et $r + dr$?
b) Quelle est la charge totale Q portée par la boule ?

2. a) Quelle est la charge volumique moyenne $\rho_m = \frac{Q}{V}$?
b) Pourquoi ρ_m est-elle différente de la moyenne : $\frac{1}{R} \int_0^R \rho(r)\, dr$?

II. Électrisation d'une boule

• Deux boules, en cuivre, de même rayon $R = 2\ \mathrm{mm}$, sont placées à la distance $d = 5\ \mathrm{cm}$ l'une de l'autre ($d \gg R$). Elles portent toutes deux la même charge Q positive.

1. • Calculer Q sachant que la force répulsive entre les deux boules a pour norme $F = 0{,}2\ \mathrm{N}$.

2. • Calculer le nombre N_1 d'électrons perdus par chaque boule lors de l'électrisation.

3. • Comparer N_1 au nombre N_0 d'atomes de cuivre dans chaque boule sachant que la masse volumique du cuivre est $\mu = 8{,}9.10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}$ et que sa masse molaire est $M = 63{,}54\ \mathrm{g.mol^{-1}}$.

4. • En pratique, les charges se répartissent en surface. Comparer N_1 au nombre N_0' d'atomes de cuivre dans la couche chargée en supposant son épaisseur de l'ordre de grandeur du diamètre des atomes, dont le rayon est $r = 128\ \mathrm{pm}$.

5. • Quelle force F' s'exercerait entre les deux boules si elles étaient électrisées avec $N_1 = N_0$?

Données : charge de l'électron : $q_e = -1{,}6.10^{-19}\ \mathrm{C}$; nombre d'Avogadro : $N_A = 6{,}02.10^{23}$.

III. Loi de Coulomb

• Un anneau fin, de centre O et de rayon R , porte la charge Q répartie régulièrement sur sa circonférence. Une charge q est mobile sur l'axe Ox perpendiculaire en O au plan de l'anneau. Calculer, en fonction de x , la force qui s'exerce sur la charge q .

IV. Champ d'un segment chargé

1. • On considère un fil rectiligne de longueur L , comportant une charge linéique (ou densité linéique de charge) notée λ .

• Pour étudier le champ électrique créé par ce fil, on utilise un repère cylindrique dont l'origine est au milieu du fil et dont l'axe (Oz) est dans la direction du fil. Avec ces notations, la charge linéique peut s'écrire sous la forme : $\lambda = \lambda_0 \,.\left(1 + \alpha\, \frac{z^2}{L^2}\right)$ où λ_0 et α sont deux constantes.

a) Soit $M(r, \theta, z)$ un point quelconque de l'espace, hors du fil, montrer que le champ électrique en ce point peut s'écrire : $\vec{E}(M) = E_r(r,z)\, \vec{u}_r + E_z(r,z)\, \vec{u}_z$ (en justifiant clairement le raisonnement utilisé).

b) Écrire l'expression intégrale du champ, déduite de la loi de Coulomb (il n'est pas demandé de calculer l'intégrale).

2. • On se limite maintenant aux points M du plan d'équation $z = 0$.

a) Montrer que le champ électrique en ce point peut s'écrire : $\vec{E}(M) = E_r(r)\, \vec{u}_r$.

b) En déduire l'expression intégrale de la composante algébrique $E_r(r)$.

c) Calculer cette intégrale.

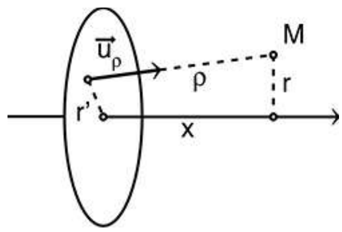
V. Champ d'un disque chargé

1. • On considère un disque de rayon R , comportant une charge surfacique (ou densité surfacique de charge) notée σ .

• Pour étudier le champ électrique créé par ce disque, on utilise un repère cylindrique dont l'origine est au milieu du disque et dont l'axe (Ox) est perpendiculaire au disque. Avec ces notations, la charge surfacique peut s'écrire sous la forme : $\sigma = \sigma_0 \,.\left(1 - \frac{2\,r'}{R}\right)$ où σ_0 est une constante.

a) Soit $M(r, \theta, x)$ un point quelconque de l'espace, hors du disque, montrer (en justifiant clairement le raisonnement utilisé) que le champ électrique en ce point peut s'écrire : $\vec{E}(M) = E_r(r,x)\, \vec{u}_r + E_x(r,x)\, \vec{u}_x$.

b) Écrire l'expression intégrale du champ, déduite de la loi de Coulomb (il n'est pas demandé de calculer l'intégrale).



2. • On se limite maintenant aux points M de l'axe (Ox), c'est à dire tels que $r = 0$.

a) Montrer que le champ électrique en ce point peut s'écrire : $\vec{E}(M) = E_x(x)\, \vec{u}_x$.

b) En déduire l'expression intégrale de la composante algébrique $E_x(x)$.

c) Calculer cette intégrale.

VI. Gradient par rapport aux coordonnées d'un point

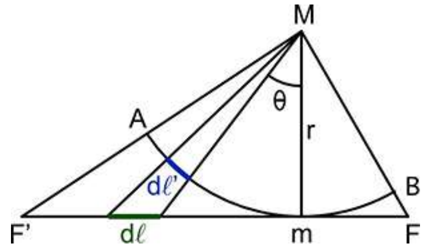
• On considère une grandeur physique scalaire $V(M_1\,;\,M_2)$ fonction de deux points M_1 et M_2 , mais ne dépendant en fait que de la distance $r = M_1M_2$. On peut alors noter $V(r)$ l'expression correspondante.

• Exprimer $\vec{\nabla}_1 V$ en fonction de $\frac{dV}{dr}$ (l'indice 1 signifie que les dérivées du gradient doivent s'appliquer aux coordonnées $(x_1\,, y_1\,, z_1)$ de M_1).

• Comparer avec $\vec{\nabla}_2 V$.

VII. Champ d'un segment uniformément chargé

• On considère un segment $F'F$ uniformément chargé d'une densité linéique λ . On étudie le champ et le potentiel en un point M situé à la distance $r = mM$ du segment.



1. • On considère alors, dans le plan $MF'F$, un arc de cercle $A\widehat{m}B$ de centre M , tangent en m à $F'F$ et portant la même densité de charge λ .

• Montrer que les éléments infinitésimaux $d\ell$ (du segment $F'F$) et $d\ell'$ (de l'arc $A\widehat{m}B$), “vus” du point M sous le même angle $d\theta$, créent en M le même champ élémentaire.

2. • Déduire du résultat précédent la direction du champ créé par la ligne AB au point M . Montrer que les surfaces équipotentielles sont des ellipsoïdes de révolution de foyers F' et F .

◊ remarque : on rappelle que la normale en un point à une ellipse est la bissectrice de l'angle qui joint ce point aux deux foyers.

3. • Calculer la valeur du potentiel sur une des équipotentielles, en posant $F'F = 2\,c$, $Q = 2\,c\,\lambda$ et en désignant par a le demi-grand axe de l'ellipsoïde considéré.

VIII. Identité de Gauss

• On considère un ensemble de n points fixes A_i . Dans un premier état, on place des charges ponctuelles q_i aux points A_i et on désigne par V_i les potentiels respectifs aux points A_i (le potentiel en un point A_i est créé par l'action des charges autres que q_i). Dans un second état, on place aux mêmes points A_i d'autres charges ponctuelles q_i' et on désigne par V_i' les nouveaux potentiels respectifs aux points A_i .

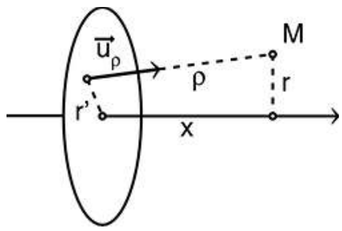
• Montrer que : $\sum q_i\, V_i' = \sum q_i'\, V_i$ (identité de Gauss).

B. EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

IX. Champ d'un disque chargé

1. • On considère un disque de rayon R , comportant une charge surfacique (ou densité surfacique de charge) uniforme notée σ .

• Pour étudier le champ électrique créé par ce disque, on utilise un repère cylindrique dont l'origine est au milieu du disque et dont l'axe (Ox) est perpendiculaire au disque.



a) Soit $M(r, \theta, x)$ un point quelconque de l'espace, hors du disque, montrer (en justifiant clairement le raisonnement utilisé) que le champ électrique en ce point peut s'écrire : $\vec{E}(M) = E_r(r, x)\,\vec{u}_r + E_x(r, x)\,\vec{u}_x$.

b) Écrire les expressions intégrales du champ et de ses composantes, selon la loi de Coulomb (il n'est pas demandé de calculer les intégrales.

2. • On se propose d'étudier les propriétés du champ au moyen du calcul numérique des intégrales.

a) Déterminer graphiquement $E_x(r, x)$ pour respectivement $\frac{x}{R} = 0{,}05$; $0{,}02$; $0{,}01$. Commenter.

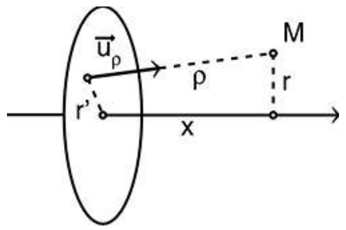
b) Déterminer graphiquement $E_r(r, x)$ pour respectivement $\frac{x}{R} = 0{,}05$; $0{,}02$; $0{,}01$. Commenter.

3. • En déduire les propriétés générales du champ dans la zone entre deux plaques analogues parallèles portant des charges opposées. Commenter.

X. Champ d'un disque chargé

1. • On considère un disque de rayon R , comportant une charge surfacique (ou densité surfacique de

charge) uniforme notée σ .



• Pour étudier la répartition des charges et le potentiel créé par ce disque, on utilise un repère cylindrique dont l'origine est au milieu du disque et dont l'axe (Ox) est perpendiculaire au disque.

a) Justifier qualitativement que la répartition ne peut pas être uniforme et préciser la façon dont elle dépend du point P sur le disque.

b) Soit $M(r, \theta, x)$ un point quelconque de l'espace, hors du disque, montrer (en justifiant clairement le raisonnement utilisé) que le potentiel en ce point peut s'écrire $V(r, x)$.

c) Écrire l'expression intégrale du potentiel selon la loi de Coulomb (il n'est pas demandé de calculer l'intégrale) ; préciser le cas particulier en surface du disque $(x = 0)$.

2. • On se propose d'étudier les propriétés du potentiel au moyen du calcul numérique des intégrales. On développe pour cela en une série de la forme $\sigma(r) = c_0 + c_1\, r + c_2\, r^2 + c_3\, r^3 + c_4\, r^4 + \cdots$.

a) Préciser les intégrales $\mathcal{J}_n(r)$ à calculer pour obtenir un développement analogue :

$$V(r) = c_0\, \mathcal{J}_0(r) + c_1\, \mathcal{J}_1(r) + c_2\, \mathcal{J}_2(r) + c_3\, \mathcal{J}_3(r) + \cdots .$$

b) Déterminer numériquement les fonctions $\mathcal{J}_n(r)$ puis ajuster les coefficients c_n donnant $V = Cste$.

c) En déduire une représentation graphique de $\sigma(r)$; commenter.

3. • Une autre approche consiste à découper l'intervalle $[0 ; R]$ par une suite de valeurs r_k avec $r_0 = 0$ et $R_N = R$, puis à développer en une série de la forme $\sigma(r) = c_0 + c_1\, \mathrm{H}(r - r_1) + c_2\, \mathrm{H}(r - r_2) + \cdots$ (fonction en escalier) où H désigne la fonction échelon de Heaviside.

a) Préciser les intégrales $\mathscr{J}_n(r)$ à calculer pour obtenir un développement analogue :

$$V(r) = c_0\, \mathscr{J}_0(r) + c_1\, \mathscr{J}_1(r) + c_2\, \mathscr{J}_2(r) + c_3\, \mathscr{J}_3(r) + \cdots .$$

b) Déterminer numériquement les fonctions $\mathscr{J}_n(r)$ puis ajuster les coefficients c_n donnant $V = Cste$.

c) En déduire une représentation graphique de $\sigma(r)$; commenter.

4. • Comparer aux propriétés générales du champ dans la zone entre deux plaques analogues parallèles portant des charges opposées. Commenter.