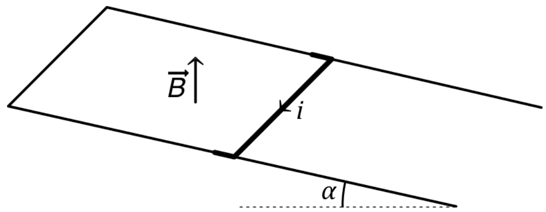
INDUCTION MAGNÉTIQUE - exercices

I. Force électromotrice induite

1. • Une tige conductrice, de masse m , de longueur ℓ et de résistance R , glisse sur deux rails parallèles de longueur L inclinés d'un angle α par rapport à l'horizontale. Les deux rails, conducteurs, sont reliés électriquement à leur extrémité supérieure par un fil orthogonal (de longueur ℓ) ; l'ensemble a une résistance négligeable. La tige, munie d'un dispositif de guidage pour se déplacer en restant perpendiculaire aux rails, subit un frottement solide f supposé insuffisant pour empêcher le glissement.



• L'ensemble est placé dans une région de l'espace soumise à un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ vertical vers le haut. Lors des mouvements de la tige, on suppose que le champ magnétique induit par le circuit est négligeable en comparaison de $\vec{B}$. On suppose en outre que la résistance de l'ensemble des deux rails reliés est négligeable en comparaison de R . Établir les équations (mécanique et électrique) décrivant l'évolution du dispositif.

2. a) Montrer que la vitesse de la tige tend théoriquement vers une limite (déterminer son expression).
b) Exprimer la position de la tige en fonction du temps, en supposant qu'elle part (initialement immobile) d'une distance ℓ de l'extrémité supérieure des rails.

3. • On considère le cas correspondant à :
$m = 100\ \mathrm{g}$; $\ell = 5{,}0\ \mathrm{cm}$; $R = 10\ \Omega$; $L = 1{,}0\ \mathrm{m}$; $\alpha = 20\ °$; $f = 300\ \mathrm{mN}$; $B = 10\ \mathrm{mT}$.
a) Justifier que la résistance des rails est négligeable.
b) Déterminer l'ordre de grandeur de la durée d'atteinte de la vitesse limite théorique ; commenter.
c) Déterminer la vitesse limite théorique ; commenter.
d) Déterminer le courant induit limite théorique ; commenter.

4. a) Déterminer la durée après laquelle la tige atteint l'extrémité des rails ; commenter.
b) En déduire la vitesse maximum atteinte.
c) Déterminer le courant induit maximum atteint.
d) Déterminer l'ordre de grandeur du champ induit maximum atteint et justifier qu'il est négligeable.

Données : champ magnétique terrestre : $B_t \approx 5.10^{-5}\ \mathrm{T}$; $g = 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$.
résistance linéique des rails : $\lambda \approx 20\ \mathrm{m\Omega.m^{-1}}$.

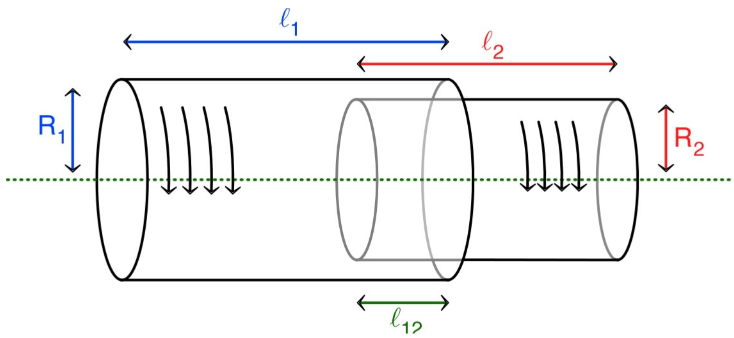
II. Bobines en interaction magnétique

1. • On considère une bobine b_1 de type solénoïde, de rayon R_1 et de longueur $\ell_1 \gg R_1$; on note n_1 le nombre de spires par unité de longueur.
• La bobine est alimentée par un circuit électrique (qu'on peut omettre dans la suite du raisonnement) ; elle est alors parcourue par un courant constant I_1 . On raisonne dans l'approximation supposant un champ magnétique uniforme à l'intérieur de bobine (algébriquement $B_1 = \mu_0\, n_1\, I_1$) et un champ magnétique nul à l'extérieur.
◊ remarque : μ_0 est la perméabilité magnétique dans le vide.
a) Établir l'expression du flux Φ_1 du champ $\vec{B}_1$ à travers les spires de la bobine b_1 elle même.
b) En déduire l'expression de l'inductance L_1 de la bobine b_1 .
c) Indiquer, en fonction de L_1 , l'expression de l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine lorsqu'elle est parcourue par un courant I_1 .

d) En déduire que l'énergie magnétique peut s'écrire $\mathcal{E}_{m1} = V_1 \frac{B_1^2}{2\mu_0}$ où V_1 est le volume de la bobine.

2. • On considère maintenant un système de deux bobines de même type, coaxiales. La seconde bobine b_2 , de rayon R_2 et de longueur $\ell_2 \gg R_2$, est parcourue par un courant I_2 ; on note n_2 le nombre de spires par unité de longueur.

• La bobine b_2 , de rayon $R_2 < R_1$, peut coulisser librement selon l'axe commun (Ox) ; elle est enfoncée d'une longueur ℓ_{12} dans la bobine b_1 , fixe.



a) En décrivant le champ magnétique d'un solénoïde par la même approximation que précédemment, déterminer l'expression de la somme des forces de Laplace causées par le champ $\vec{B}_2$ sur la bobine b_1 .

b) Déterminer de même l'expression de la somme des forces de Laplace causées par le champ $\vec{B}_1$ sur la bobine b_2 . Cela vérifie-t-il la loi des actions réciproques ?

c) Dessiner l'allure (approximative) **réelle** des lignes de champ de la bobine b_2 (contrairement à l'approximation précédente). En déduire l'existence d'une force de Laplace totale non nulle du champ $\vec{B}_2$ sur la bobine b_1 .

d) Dessiner de même l'allure (approximative) **réelle** des lignes de champ de la bobine b_1 . En déduire l'existence d'une force de Laplace totale non nulle du champ $\vec{B}_1$ sur la bobine b_2 . Cela vérifie-t-il (qualitativement) la loi des actions réciproques ?

3. • Le raisonnement précédent étant seulement qualitatif, on reprend la méthode de l'énergie, avec les champs magnétiques approchés comme dans la question (1), en supposant qu'elle peut se généraliser au cas des deux bobines en interaction.

a) Déterminer l'expression des trois volumes V_1' , V_2' et V_{12} dans lesquels le champ magnétique est uniforme (préciser dans chaque cas sa valeur).

b) Déterminer l'expression de l'énergie magnétique totale, puis en déduire l'énergie magnétique d'interaction des deux bobines.

c) En déduire le coefficient d'inductance mutuelle entre les bobines.

d) Pour tester la validité de l'approximation utilisée, établir l'expression de l'énergie d'interaction des spires de la bobine b_2 dans le champ $\vec{B}_1$ (en se basant sur le moment dipolaire de chaque spire). Commenter le résultat.

e) En raisonnant sur le travail des forces, en déduire l'expression de la force de Laplace totale exercée par le champ $\vec{B}_1$ sur la bobine b_2 .

III. Freinage par courants de Foucault

• On considère un aimant permanent cylindrique, de rayon $R = 15\ \mathrm{mm}$ et de longueur $L = 50\ \mathrm{mm}$, de moment dipolaire $m = 1\ \mathrm{A.m^2}$, glissant “sans frottement” dans un tube de cuivre vertical, de même rayon intérieur et d'épaisseur $e = 2\ \mathrm{mm}$. La conductivité électrique du cuivre est $\rho = 6.10^7\ \mathrm{S.m^{-1}}$. La masse volumique du fer est $\mu = 7{,}9\ \mathrm{kg.dm^{-3}}$.

1. • Pour estimer l'effet du freinage par courants de Foucault, on modélise l'aimant par son moment dipolaire (qu'on peut arbitrairement supposé orienté vers le haut), décrit par un champ magnétique correspondant aux coordonnées sphériques : $B_{\underline{r}} \approx \frac{2\mu_0\, m \cos(\theta)}{4\pi \underline{r}^3}$ et $B_{\underline{\theta}} \approx \frac{\mu_0\, m \sin(\theta)}{4\pi \underline{r}^3}$. Établir l'expression des coordonnées cylindriques adaptées au dispositif.

2. • Pour estimer les courants induits, on étudie les variations de flux magnétique dans chaque tranche de tube de hauteur δz (très petite).

a) Justifier que les courants de Foucault ne peuvent circuler que circulairement selon des “spires” horizontales.

b) Lors de la chute de l'aimant, exprimer (en fonction de la position relative par rapport au centre de l'aimant) le flux magnétique coupé par une “spire” de hauteur δz quand l'aimant descend de sa hauteur. En déduire la f.e.m. induite.

c) Exprimer la résistance électrique de la tranche. En déduire le courant induit.

d) Exprimer la force de Laplace exercée par l'aimant sur la tranche.

e) Exprimer la force exercée au total par le tube sur l'aimant, en négligeant les “effets limites”, c'est-à-dire en supposant que la décroissance en s'éloignant de l'aimant est assez nette pour qu'on puisse intégrer jusqu'à l'infini.

f) Effectuer l'application numérique et commenter.