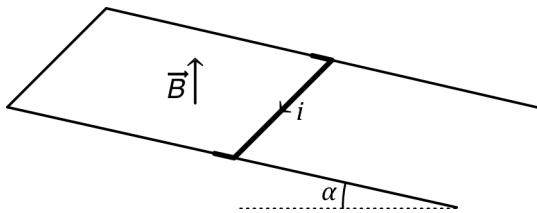


INDUCTION MAGNÉTIQUE - corrigé des exercices

I. Force électromotrice induite

- On choisit de décrire la position de la tige selon un axe Ox correspondant aux rails, avec l'origine à l'extrémité supérieure.
 - Lorsque la tige est en mouvement à la vitesse (algébrique) $v = \dot{x}$ la variation de flux dans le circuit de surface $S = \ell x$ cause une f.e.m. induite $e = \frac{d\phi}{dt} = B \cos(\alpha) \ell v$ dans le sens indiqué sur le schéma de l'énoncé. Cela donne un courant $i = \frac{e}{R} = \frac{\ell B \cos(\alpha)}{R} \dot{x}$.
 - La tige est soumise à son poids, à la réaction normale de l'axe, au frottement et à une force de LaPlace causée par le courant induit. En projection sur l'axe : $m \ddot{x} = m g \sin(\alpha) - f - i \ell B \cos(\alpha)$.



- L'évolution du dispositif se fait donc selon l'équation : $\ddot{v} + \frac{\ell^2 B \cos(\alpha)}{m R} v = g \sin(\alpha) - \frac{f}{m}$.

- L'équation précédente peut s'écrire : $\ddot{v} + k v = \gamma$.
 - Les solutions de l'équation "homogène" sont de la forme : $v = Cte e^{-kt}$; l'équation complète a une solution constante (comme le second membre) : $v_m = \frac{\gamma}{k}$.
 - Les solutions sont donc de la forme : $v = v_m + Cte e^{-kt}$.
 - La condition initiale $v = 0$ impose la solution : $v = v_m \cdot (1 - e^{-kt})$.
 - La vitesse tend donc vers la valeur limite $v_m = \frac{\gamma}{k}$.
- La position correspond à une primitive de la vitesse : $x = v_m \cdot \left(t + \frac{e^{-kt}}{k} \right) + Cste$; les conditions initiales imposent : $x = v_m \cdot \left(t + \frac{e^{-kt} - 1}{k} \right) + \ell$.
- La contribution des rails à la résistance reste inférieure à : $(2L + \ell) \lambda = 41 \text{ m}\Omega \ll R$ (négligeable).
- On obtient dans ce cas : $k = \frac{\ell^2 B \cos(\alpha)}{m R} = 2,35 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$; cela correspond à une durée théorique d'atteinte de la limite de l'ordre de deux ou trois fois $\tau = \frac{1}{k} = 11,8$ heures ; en pratique le bas des rails est probablement atteint bien avant (à vérifier d'après ce qui suit).
- On obtient par ailleurs : $\gamma = g \sin(\alpha) - \frac{f}{m} = 0,355 \text{ m.s}^{-2} > 0$; cela confirme que le frottement est insuffisant pour s'opposer au mouvement.
 - La vitesse limite théorique est : $v_m = \frac{\gamma}{k} \approx 15 \text{ km.s}^{-1}$; le frottement fluide sur l'air est alors forcément important (supérieur au frottement solide considéré). Mais par ailleurs une telle vitesse, associée à la durée précédente, correspond à une très grande distance parcourue avant l'atteinte de la vitesse limite ; cela confirme que la limite effective est le bas des rails.
- Le courant induit limite théorique est : $I_m = \frac{\ell}{R} v_m \approx 76 \text{ A}$; ce courant très important correspond à une puissance Joule $R I_m^2 \approx 57 \text{ kW}$ et cause un échauffement destructif.

- La durée cherchée est solution de l'équation : $L = v_m \cdot \left(t + \frac{e^{-kt} - 1}{k} \right) + \ell$.

• Ceci peut aussi s'écrire : $k t + e^{-k t} - 1 = \frac{k}{v_p} (L - \ell) = K \approx 1,49 \cdot 10^{-9}$; cette équation compliquée semblerait ne pouvoir être résolue que numériquement, mais la solution peut s'exprimer à l'aide de la fonction W de Lambert.

• Il est toutefois utile de remarquer que la limite des rails est atteinte bien avant la limite théorique, donc $k t \ll 1$; on peut alors utiliser un développement limité $e^{-k t} \approx 1 - k t + \frac{k^2}{2} t^2$. La solution correspond ainsi à : $\frac{k^2}{2} t^2 \approx K$; $t_0 \approx \frac{\sqrt{2K}}{k} = \sqrt{\frac{2(L-\ell)}{\gamma}} \approx 2,3 \text{ s}$; cela correspond au résultat prévu en l'absence d'effet magnétique : la force de Laplace due au courant induit est négligeable.

◊ remarque : à l'ordre suivant on obtient $\frac{k^2}{2} t^2 \approx K + \frac{k^3}{6} t^3 \approx K \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2K}}{3}\right)$ montrant bien que la correction est tout-à-fait négligeable.

4.b. • Vu ce qui précède, la vitesse maximum atteinte est : $v_0 \approx \gamma t_0 = \sqrt{2\gamma \cdot (L-\ell)} \approx 0,82 \text{ m.s}^{-1}$.

4.c. • Le courant induit maximum atteint est : $i_0 = \frac{\ell}{R} v_0 \approx 4,1 \text{ mA}$ (très faible).

4.d. ◊ remarque : le champ magnétique terrestre est négligeable en comparaison de B .

• Le champ induit dans le circuit est d'un ordre de grandeur comparable à celui au centre d'une spire circulaire de rayon ℓ (un calcul plus précis est inutile) : $B_0 \approx \frac{\mu_0 i_0}{2\ell} \approx 5 \cdot 10^{-8} \text{ T}$; cela est encore plus négligeable que le champ terrestre.

◊ remarque : dans les exercices théoriques d'entraînement à la modélisation sur l'induction (qu'il est important de savoir résoudre), les dispositifs décrits sont trop souvent loin des ordres de grandeur réalistes ; le cas étudié ici est en pratique intéressant pour réfléchir à cet aspect.

II. Bobines en interaction magnétique

1.a. • L'approximation du champ uniforme à l'intérieur correspond à un solénoïde "infiniment" long. Dans cette approximation, tout plan perpendiculaire à l'axe est plan de symétrie géométrique et électrique, donc plan d'antisymétrie pour le champ magnétique (pseudovecteur). Ainsi \vec{B}_1 doit être perpendiculaire au plan, donc parallèle à l'axe.

• Le vecteur surface de chaque spire est aussi parallèle à l'axe, donc le flux à travers chaque spire est simplement le produit de sa surface $S_1 = \pi R_1^2$ par B_1 (uniforme). En ajoutant l'effet de toutes les spires, dont le nombre est $N_1 = n_1 \ell_1$, on obtient : $\Phi_1 = n_1 \ell_1 S_1 B_1 = \mu_0 n_1^2 \ell_1 S_1 I_1$.

1.b. • L'inductance est le coefficient tel que $\Phi_1 = L_1 I_1$ (ainsi en régime variable la f.c.e.m. induite peut s'écrire $e = \frac{d\varphi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt}$). Ceci correspond à $L_1 = \mu_0 n_1^2 \ell_1 S_1$.

1.c. • L'énergie magnétique est $\mathcal{E}_{m1} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$.

◊ remarque : en régime variable on retrouve la puissance électrique $p = u_1 i_1 = L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} = \frac{d\mathcal{E}_{m1}}{dt}$.

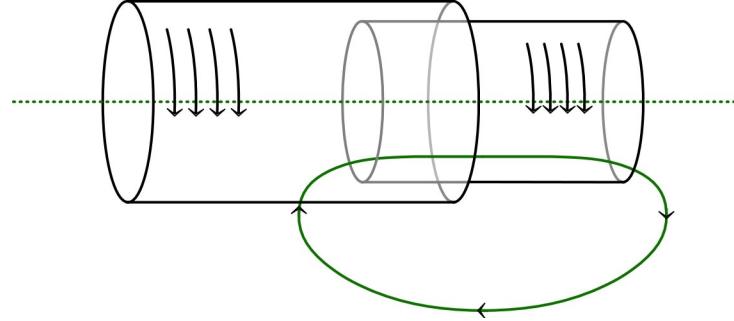
1.d. • En substituant $I_1 = \frac{B_1}{\mu_0 n_1}$ on peut écrire : $\mathcal{E}_{m1} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 = \frac{1}{2} \ell_1 S_1 \frac{B_1^2}{\mu_0} = V_1 \frac{B_1^2}{2\mu_0}$.

2.a. • Toutes les spires de b_1 sont à l'extérieur de b_2 , où le champ \vec{B}_2 est nul dans l'approximation considérée. Les forces de Laplace sont donc nulles.

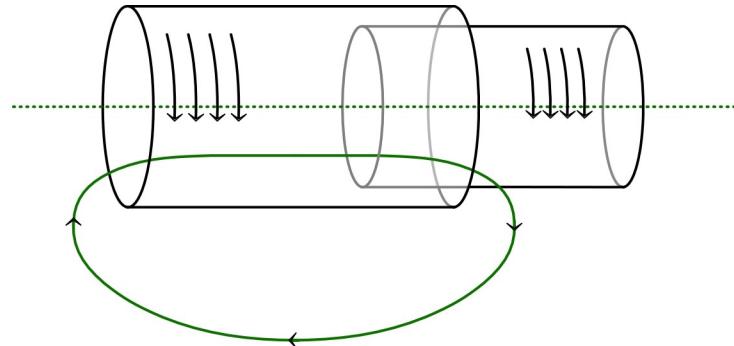
2.b. • Seules les spires de b_2 situées à l'intérieur de b_1 subissent des forces de Laplace. La force infinitésimale est $d\vec{F} = I_2 d\vec{\ell} \times \vec{B}_1 = I_2 d\ell B_1 \vec{u}_r$. Puisque les forces subies par deux éléments $d\ell$ symétriques par rapport à l'axe se compensent, la somme des forces de Laplace est nulle. Ceci est cohérent avec le résultat précédent : les action réciproques nulles sont effectivement opposées.

◊ remarque : dans l'approximation proposée par l'énoncé, les spires sont considérées comme circulaires, mais l'enroulement du fil fait qu'elles sont en réalité hélicoïdales ; bien que $d\vec{\ell}$ soit selon \vec{u}_φ (en coordonnées cylindriques, en notant φ pour éviter toute confusion avec le θ précédent), la légère hélicité correspond à un décalage selon $\ell_{12} \vec{u}_x$ à chaque tour ; au total : $\int d\vec{\ell} = \int d\vec{\ell}_{12} = \ell_{12} \vec{u}_x$; on obtient ainsi pour \vec{B}_1 uniforme : $\vec{F} = \int d\vec{F} = I_2 \cdot (\int d\vec{\ell}) \times \vec{B}_1 = I_2 \ell_{12} B_1 \vec{u}_x \times \vec{u}_x = \vec{0}$ (ceci n'est toutefois pas la réponse normalement attendue).

- 2.c. • Les lignes du champ \vec{B}_2 sont refermées sur elles mêmes et recoupent les spires de b_1 avec une orientation telle qu'elles causent des forces de Laplace orientées selon \vec{u}_x .



- 2.d. • La situation est analogue pour les lignes du champ \vec{B}_1 ; leur orientation est telle qu'elles causent des forces de Laplace orientées selon $-\vec{u}_x$. Cela est qualitativement conforme à la loi des actions réciproques.



- 3.a. • Le volume intersection des deux bobines est $V_{12} = S_2 \ell_{12}$, soumis au champ total $\vec{B}_1 + \vec{B}_2$.
 • Le complément de ce volume dans b_1 est $V'_1 = S_1 \ell_1 - S_2 \ell_{12}$, soumis au champ \vec{B}_1 .
 • Le complément dans b_2 est $V'_2 = S_2 \ell_2 - S_2 \ell_{12}$, soumis au champ \vec{B}_2 .

- 3.b. • Si la méthode se généralise, l'énergie totale est : $\mathcal{E}_m = V'_1 \frac{B_1^2}{2 \mu_0} + V'_2 \frac{B_2^2}{2 \mu_0} + V_{12} \frac{(B_1 + B_2)^2}{2 \mu_0}$.

- En l'absence d'interaction, l'énergie serait : $\mathcal{E}_{m1} + \mathcal{E}_{m2} = V_1 \frac{B_1^2}{2 \mu_0} + V_2 \frac{B_2^2}{2 \mu_0}$.

- L'énergie d'interaction est donc : $\mathcal{E}_{m12} = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{m1} - \mathcal{E}_{m2} = V_{12} \frac{(B_1 + B_2)^2 - B_1^2 - B_2^2}{2 \mu_0} = V_{12} \frac{B_1 B_2}{\mu_0}$.

- 3.c. • En fonction du coefficient d'inductance mutuelle M , l'énergie d'interaction peut s'écrire :

$$\mathcal{E}_{m12} = M I_1 I_2 = M \frac{B_1}{\mu_0 n_1} \frac{B_2}{\mu_0 n_2} .$$

- La comparaison donne : $M = \mu_0 n_1 n_2 \ell_{12} S_2$.

- 3.d. • L'orientation du moment dipolaire $\vec{m} = I_2 \vec{S}_2$ d'une spire étant la même que celle du champ magnétique, son énergie potentielle d'interaction peut s'écrire : $E_{ps} = -\vec{m} \cdot \vec{B}_1 = -I_2 S_2 B_1 = -\frac{B_2}{\mu_0 n_2} S_2 B_1$.

- Dans cette approximation, l'énergie pour l'ensemble des spires est donc :

$$E_p = -n_2 \ell_{12} E_{ps} = -V_{12} \frac{B_1 B_2}{\mu_0}.$$

- Il peut sembler étonnant d'obtenir pratiquement le même résultat, sauf le signe. Un raisonnement attentif permet de conclure que \mathcal{E}_{m12} est l'énergie associée aux courants électriques et à leurs champs, alors que E_p est l'énergie associée aux dispositifs mécaniques que sont les bobines. L'égalité au signe près vient du fait que ce terme d'interaction décrit une transformation d'énergie électrique en énergie mécanique, ou réciproquement : l'augmentation de l'une des deux formes énergies doit correspondre à une diminution équivalente de l'autre.

- 3.e.
- Le travail (algébrique) lors d'un éloignement est : $dW = F dx = -F d\ell_{12}$.
 - L'énergie potentielle d'interaction peut s'écrire : $E_p = -\mathcal{E}_{m12} = -\mu_0 n_1 n_2 \ell_{12} S_2 I_1 I_2$.
 - D'après la définition des énergies potentielles : $dW = -dE_p = \mu_0 n_1 n_2 S_2 I_1 I_2 d\ell_{12}$. La force de Laplace totale a donc pour expression algébrique : $F = -\mu_0 n_1 n_2 S_2 I_1 I_2$; il s'agit effectivement d'une force attractive, conformément à la conclusion de la question (2.d).
 - ◊ remarque : pour raisonner ainsi, on peut utiliser des générateurs de courant parfaits, afin de manipuler dans les conditions où les effets magnétiques induits sont sans effet rétroactif sur les courants I_1 et I_2 (supposés constants) ; il suffit toutefois de raisonner avec un mouvement extrêmement lent, afin que les effets induits soient négligeables.

III. Freinage par courants de Foucault

1. • On peut considérer :

$$B_r = B_r \sin(\underline{\theta}) + B_\theta \cos(\underline{\theta}) = \frac{3 \mu_0 m \sin(\underline{\theta}) \cos(\underline{\theta})}{4\pi r^3} ;$$

$$B_\theta = B_\theta = 0 ;$$

$$B_z = B_r \cos(\underline{\theta}) - B_\theta \sin(\underline{\theta}) = \frac{\mu_0 m [2 \cos^2(\underline{\theta}) - \sin^2(\underline{\theta})]}{4\pi r^3}.$$

- Le changement de coordonnées (avec origine au centre de l'aimant) correspond par ailleurs à :

$$r = \sqrt{r^2 + z^2} ; \underline{\theta} = \arctan\left(\frac{r}{z}\right) ; \sin(\underline{\theta}) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} ; \cos(\underline{\theta}) = \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}.$$

- Ceci donne donc :

$$B_r = \frac{3 \mu_0 m r z}{4\pi (r^2 + z^2)^{5/2}} ; B_z = \frac{\mu_0 m [2 z^2 - r^2]}{4\pi (r^2 + z^2)^{5/2}}.$$

- 2.a. • L'ensemble du dispositif étant invariant par rotation selon l'axe, les courants induits doivent l'être aussi.

- Si on imaginait une contribution axiale (verticale) au courant, cela provoquerait une accumulation de charges opposées à chaque extrémité du tube (isolé). Or, une accumulation infinitésimale suffirait à causer une différence de potentiel importante et un champ électrique qui s'opposerait au courant axial ; on peut donc négliger une telle contribution et se limiter à étudier des courants circulaires horizontaux.

- 2.b. • Le flux coupé lors d'une chute de l'aimant d'une hauteur δz est le même que si c'était la spire qui remontait de sa hauteur δz .

- En négligeant l'influence de l'épaisseur du tube (on calcule à la limite entre l'aimant et la surface intérieure du tube), le flux magnétique coupé peut s'écrire : $d\phi = B_r 2\pi R \delta z = \frac{3 \mu_0 m R^2 z}{2(R^2 + z^2)^{5/2}} \delta z$.

- En notant δt la durée de cette chute, la f.e.m. induite est ainsi : $E = -\frac{\delta\phi}{\delta t} = -\frac{3 \mu_0 m R^2 z}{2(R^2 + z^2)^{5/2}} \frac{\delta z}{\delta t}$.

- 2.c. • L'épaisseur du tube étant nettement inférieure à son rayon, on peut estimer la résistance d'un conducteur de longueur $2\pi R$ et de section $e \delta z$: $r = \rho \frac{2\pi R}{e \delta z}$.

- En notant $v = \frac{\delta z}{\delta t}$ la vitesse (algébrique) de l'aimant, le courant induit est ainsi :

$$\delta i = \frac{E}{r} = -\frac{3 \mu_0 m e}{4\pi \rho} \frac{R z \delta z}{(R^2 + z^2)^{5/2}} v.$$

- 2.d. • La force de Laplace sur un élément $d\ell = R d\theta$ a une composante radiale causée par B_z mais l'intégration sur la spire est nulle par symétrie (deux éléments opposés ont des contributions opposées).
 • Cette force a aussi une composante axiale causée par B_r et l'intégration sur la spire se ramène à une somme algébrique.
 • Au total, selon (Oz) : $\delta F = -\delta i 2\pi R B_r = \frac{(3\mu_0 m)^2 e v}{8\pi \rho} \frac{R^3 z^2 \delta z}{(R^2 + z^2)^5}$.
 ♦ remarque : cette force est dans le sens du mouvement.

- 2.e. • La force exercée au total par le tube sur l'aimant est l'action réciproque de la somme des forces de Laplace ; on peut l'écrire : $F = -\frac{(3\mu_0 m)^2 e v}{8\pi \rho R^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2 du}{(1+u^2)^5}$.

♦ remarque : cette force est toujours opposée au sens du mouvement ; elle exerce un freinage.

- Pour calculer l'intégrale $J = \int \frac{u^2 du}{(1+u^2)^5}$ on peut utiliser l'intégration par parties :

$$\int \frac{u^2 du}{(1+u^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)} \frac{u}{(1+u^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{du}{(1+u^2)^{n-1}}.$$

- On peut aussi combiner avec une simplification opportuniste :

$$\int \frac{du}{(1+u^2)^n} = \int \frac{(1+u^2-u^2) du}{(1+u^2)^n} = -\int \frac{u^2 du}{(1+u^2)^n} + \int \frac{du}{(1+u^2)^{n-1}}.$$

- Ceci donne :

$$J = \int \frac{u^2 du}{(1+u^2)^5} = -\frac{1}{8} \frac{u}{(1+u^2)^4} + \frac{1}{8} \int \frac{du}{(1+u^2)^4} = -\frac{1}{8} \frac{u}{(1+u^2)^4} + \frac{1}{8} \left(-\int \frac{u^2 du}{(1+u^2)^4} + \int \frac{du}{(1+u^2)^3} \right);$$

$$J = -\frac{1}{8} \frac{u}{(1+u^2)^4} - \frac{1}{8} \int \frac{u^2 du}{(1+u^2)^4} + \frac{1}{8} \int \frac{du}{(1+u^2)^3};$$

$$J = -\frac{1}{8} \frac{u}{(1+u^2)^4} - \frac{1}{8} \left(-\frac{1}{6} \frac{u}{(1+u^2)^3} + \frac{1}{6} \int \frac{du}{(1+u^2)^3} \right) + \frac{1}{8} \int \frac{du}{(1+u^2)^3};$$

$$J = -\frac{1}{8} \frac{u}{(1+u^2)^4} + \frac{1}{48} \frac{u}{(1+u^2)^3} + \frac{5}{48} \int \frac{du}{(1+u^2)^3};$$

$$J = -\frac{1}{8} \frac{u}{(1+u^2)^4} + \frac{1}{48} \frac{u}{(1+u^2)^3} + \frac{5}{48} \left(-\int \frac{u^2 du}{(1+u^2)^3} + \int \frac{du}{(1+u^2)^2} \right);$$

$$J = -\frac{1}{8} \frac{u}{(1+u^2)^4} + \frac{1}{48} \frac{u}{(1+u^2)^3} - \frac{5}{48} \left(-\frac{1}{4} \frac{u}{(1+u^2)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{du}{(1+u^2)^2} \right) + \frac{5}{48} \int \frac{du}{(1+u^2)^2};$$

$$J = -\frac{1}{8} \frac{u}{(1+u^2)^4} + \frac{1}{48} \frac{u}{(1+u^2)^3} + \frac{5}{192} \frac{u}{(1+u^2)^2} + \frac{5}{64} \int \frac{du}{(1+u^2)^2};$$

$$J = -\frac{1}{8} \frac{u}{(1+u^2)^4} + \frac{1}{48} \frac{u}{(1+u^2)^3} + \frac{5}{192} \frac{u}{(1+u^2)^2} + \frac{5}{64} \left(-\int \frac{u^2 du}{(1+u^2)^2} + \int \frac{du}{1+u^2} \right);$$

$$J = -\frac{1}{8} \frac{u}{(1+u^2)^4} + \frac{1}{48} \frac{u}{(1+u^2)^3} + \frac{5}{192} \frac{u}{(1+u^2)^2} + \frac{5}{128} \frac{u}{1+u^2} + \frac{5}{128} \int \frac{du}{1+u^2}.$$

- Les termes $\frac{u}{(1+u^2)^n}$ tendent vers zéro aux limites, donc ne contribuent pas à l'intégrale cherchée :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2 du}{(1+u^2)^5} = \frac{5}{128} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{5}{128} [\arctan(\alpha)]_{-\infty}^{\infty} = \frac{5\pi}{128}. \text{ Ainsi : } F = -\lambda v \text{ avec } \lambda = \frac{45}{1024} \frac{(\mu_0 m)^2 e}{\rho R^4}.$$

- 2.f. • Le coefficient de frottement "fluide visqueux" est ainsi : $\lambda = 4,6 \cdot 10^{-17} \text{ kg.s}^{-1}$.
 • La masse de l'aimant est environ : $m = 0,28 \text{ kg}$.
 • En considérant l'aimant initialement immobile, l'équation du mouvement : $m \dot{v} + \lambda v = -m g$ donne par intégration : $v = v_\infty \cdot (1 - e^{-t/\tau})$ avec une constante de temps $\tau = \frac{m}{\lambda} = 6 \cdot 10^{15} \text{ s}$ et une vitesse limite théorique $v_\infty = g \tau = 6 \cdot 10^{14} \text{ m.s}^{-1}$.
 • Ceci montre que le ralentissement est généralement très limité (la limite n'est en pratique jamais atteinte) : il faudrait un aimant de très grand moment dipolaire, tout en restant de masse limitée.
 ♦ remarque : pour obtenir un effet réglable, mais en outre bien plus efficace qu'avec un aimant permanent, les camions utilisant un ralentisseur à courants de Foucault sont munis d'électro-aimants.