ÉM.V - CHAMP MAGNÉTOSTATIQUE

1. Densité de courant

• On se limite ici aux champs magnéto<u>statiques</u> créés par des courants permanents (pour des circuits immobiles parcourus par des courants continus).

• De même qu'on décrit la répartition des charges par une "densité volumique de charge" : $\rho = \frac{dQ}{d\tau}$, on peut décrire la "répartition" du courant à travers la section d'un conducteur par une "densité de courant" : $\vec{j} = \sum \rho_i \langle \vec{v}_i \rangle$ (somme sur types de porteurs de charge) telle que le courant à travers la section d'un conducteur soit : $I = \iint \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS}$.

◊ remarque : on ajoute <u>constructivement</u> les contributions des porteurs de charge positifs et négatifs.

• On se limite ici à l'étude de circuits "filiformes" (on ignore la répartition du courant, donc l'étude est moins approfondie que celle de l'électrostatique).

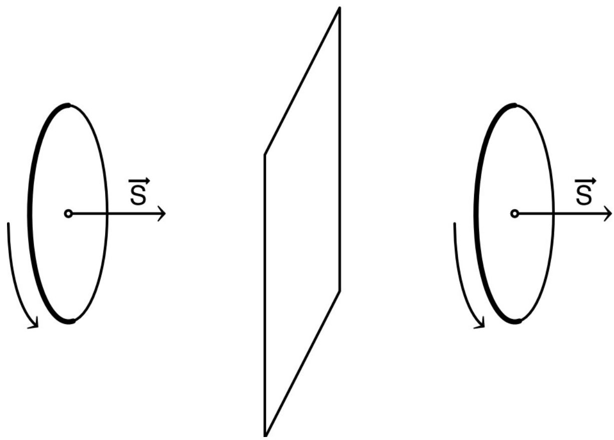
2. Loi de Biot et Savart pour un circuit filiforme

• Pour un <u>circuit</u> (fermé) filiforme orienté C , parcouru par un courant I constant (on oriente le circuit dans le sens du courant), le champ magnétique créé en un point M peut s'écrire (loi de Biot et Savart) : $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I\, \overrightarrow{d\ell} \times \vec{u}_r}{r^2}$

avec $\overrightarrow{d\ell} = d\overrightarrow{OP}$ "élément infinitésimal du circuit" ; $r = PM$; $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{PM}}{r}$;

$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0\, c^2} \approx 4\pi . 10^{-7}\ \mathrm{H.m^{-1}}$ "perméabilité magnétique du vide".

• À cause du produit vectoriel, la contribution $\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, \overrightarrow{d\ell} \times \vec{u}_r}{r^2}$ à l'intégrale est <u>orthoradiale</u> (la contribution analogue en électrostatique est radiale).



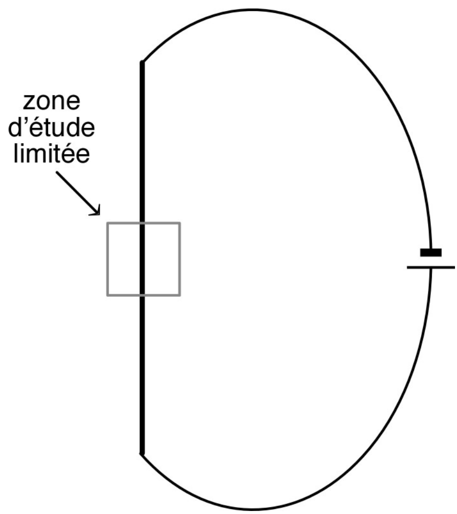
De ce fait, le champ magnétique $\vec{B}$ est un “pseudo-vecteur” ; c’est-à-dire que, pour une symétrie plane, il est transformé en l’opposé de son “symétrique” géométrique (de même qu’un “vecteur surface” $\vec{S}$).

3. Application au calcul du champ magnétique

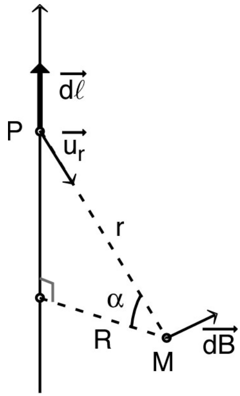
3.1. Fil rectiligne “infini”

• En plus du problème de “l’infini”, un fil rectiligne infini n’est pas un circuit (fermé) ; a priori, on ne peut donc pas lui appliquer la loi de Biot et Savart.

En réalité, le modèle du fil rectiligne infini représente une portion rectiligne d’un circuit dont on limite l’étude à de faibles distances, de telle sorte que le “reste” (non rectiligne) du circuit ait un effet négligeable.



• Pour un tel modèle les invariances, par rotation autour de l'axe et par translation selon l'axe, conduisent à utiliser des coordonnées cylindriques.



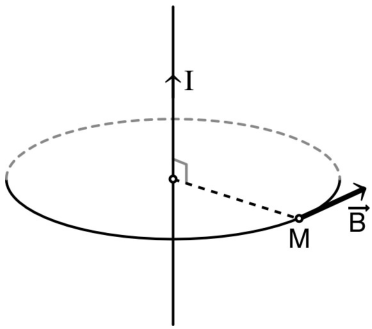
L'expression algébrique des coordonnées du champ en un point M ne peut alors dépendre que de la distance R entre le fil et le point M .

En outre, puisque chaque contribution :

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,\overrightarrow{d\ell} \times \vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,d\ell}{r^2} \cos(\alpha)\ \vec{u}_\theta$$

est perpendiculaire au plan défini par le fil et M , il en est de même pour $\vec{B}$ total.

On peut ainsi écrire en coordonnées cylindriques : $\vec{B} = B_\theta(R)\,\vec{u}_\theta$.



Les lignes de champ sont donc des cercles perpendiculaires au fil et centrés sur lui ; elles sont orientées dans le sens de rotation positif par rapport au sens du courant.

◊ remarque : le fil et M sont invariants par symétrie selon le plan qu'ils définissent, donc $\vec{B}$ l'est aussi ; ainsi $\vec{B} \cong B_R\,\vec{u}_R + B_\theta\,\vec{u}_\theta + B_z\,\vec{u}_z$ (pseudovecteur représenté par un vecteur) est identique à l'opposé du vecteur symétrique : $\vec{B} = \mathcal{S}(\vec{B}) \cong -\mathcal{S}(B_R\,\vec{u}_R + B_\theta\,\vec{u}_\theta + B_z\,\vec{u}_z) = -B_R\,\vec{u}_R + B_\theta\,\vec{u}_\theta - B_z\,\vec{u}_z$; ainsi B_R et B_z doivent être nulles.

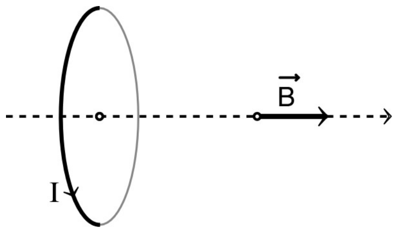
• On peut intégrer : $dB_\theta = d\vec{B} \cdot \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0\,I}{4\pi} \frac{d\ell\,\cos(\alpha)}{r^2}$ avec :

$$r = \sqrt{R^2 + z^2}\ ;\ \cos(\alpha) = \frac{R}{r}\ ;\ z = R\,\tan(\alpha)\ ;\ d\ell = dz\ .$$

On obtient : $B_\theta = \frac{\mu_0\,I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,dz = \frac{\mu_0\,I}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(\alpha)}{R}\,d\alpha = \frac{\mu_0\,I}{2\pi\,R}$.

3.2. Spire circulaire (champ sur l'axe)

• On cherche le champ $\vec{B}$ d'une spire circulaire de rayon R et d'axe Ox, en se limitant aux points de l'axe.

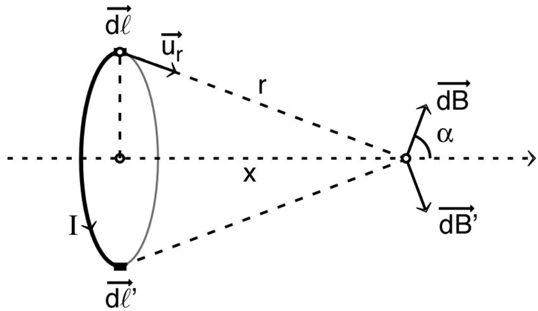


Sur l'axe, le champ est selon Ox (dans le sens axial positif par rapport au sens de rotation du courant) : $\vec{B} = B_x \, \vec{u}_x$.

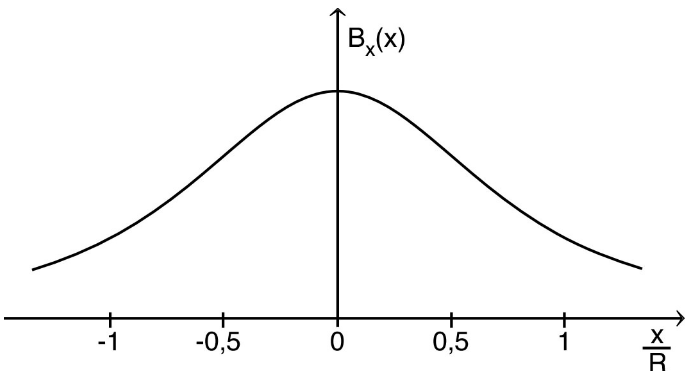
En effet, les contributions

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \, \overrightarrow{d\ell} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

de deux éléments $\overrightarrow{d\ell}$ et $\overrightarrow{d\ell}$' symétriques ont des projections qui se compensent dans les directions perpendiculaires à Ox .



• En intégrant : $dB_x = \frac{\mu_0 \, I \, d\ell}{4\pi \, r^2} \cos(\alpha)$ avec $r = \sqrt{R^2 + x^2}$; $\cos(\alpha) = \frac{R}{r}$ et $d\ell = R \, d\theta$; on obtient : $B_x = \frac{\mu_0 \, I \, R^2}{2 \, (R^2+x^2)^{3/2}}$.



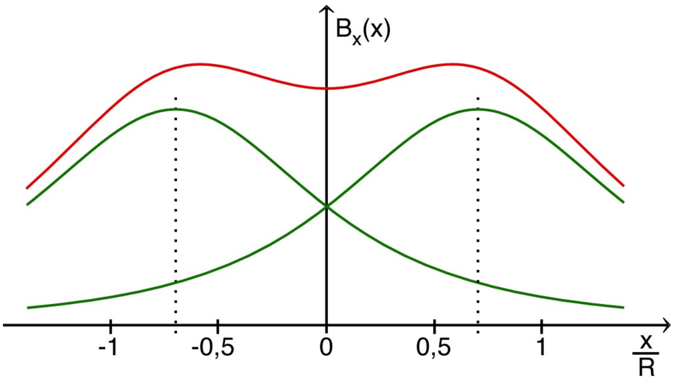
◊ remarque : pour une bobine plate constituée de N spires, il suffit de multiplier par N ; on retrouve en particulier au centre de la spire : $B_x = \frac{\mu_0 \, N \, I}{2 \, R}$.

◊ remarque : les champs magnétiques des aimants sont dus à des courants analogues au niveau microscopique.

3.3. Bobines de Helmholtz

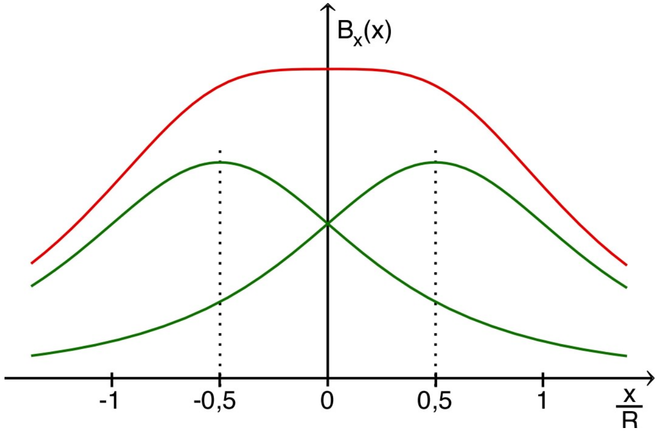
• Pour un ensemble de deux spires circulaires de rayon R et d'axe Ox , placées en x_0 et $-x_0$ et parcourues par le même courant I (de même sens) ; on cherche la valeur de x_0 telle que le champ magnétique au voisinage du centre du dispositif soit le plus uniforme possible (en se limitant aux points de l'axe).

Puisque le champ est selon l'axe : $B_x = B_{1x} + B_{2x}$. Par symétrie, le champ est forcément extremum au centre, avec : $\frac{dB_x}{dx} = 0$; $\frac{d^3B_x}{dx^3} = 0$. On peut donc écrire : $B_x(x) \approx B_x(0) + \frac{d^2B_x}{dx^2}\,\frac{x^2}{2!} + \frac{d^4B_x}{dx^4}\,\frac{x^4}{4!} + \cdots$.



Pour que le champ soit le plus uniforme possible il faut en plus : $\frac{d^2B_x}{dx^2} = 0$, ce qui correspond à $x_0 = \frac{R}{2}$ (distance R entre les deux bobines).

Dans ce cas, le champ est d'ailleurs aussi quasi-uniforme radialement. Le dispositif ainsi ajusté (bobines de Helmholtz) est très pratique pour obtenir simplement une zone de champ magnétique quasi-uniforme et facile d'accès.



3.4. Solénoïde

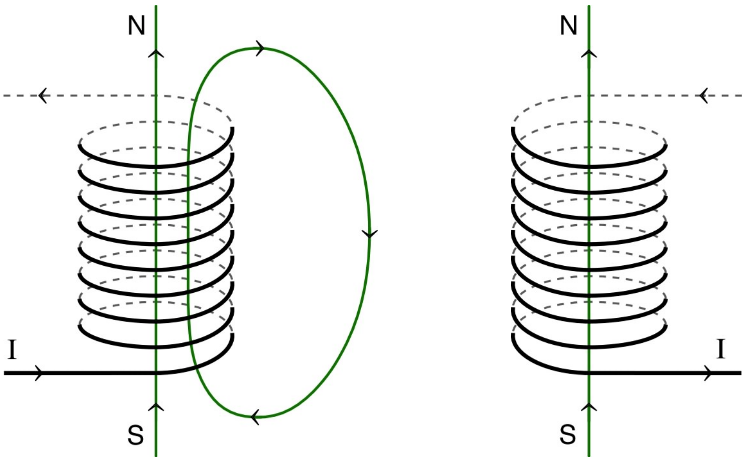
• Pour calculer le champ sur l'axe d'un solénoïde de N spires et de longueur L , on considère une "bobine plate infinitésimale" d'épaisseur dx_0 et comportant $\frac{N}{L}\,dx_0$ spires, puis on intègre pour x_0 variant de $-\frac{L}{2}$ à $\frac{L}{2}$.

On obtient ainsi : $B_x(x) = \frac{\mu_0\,N\,I}{2\,L}\left[\frac{x+\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2+\left(x+\frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{x-\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2+\left(x-\frac{L}{2}\right)^2}}\right]$.

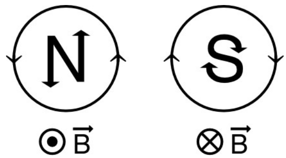
En pratique, le solénoïde crée :

◊ à l'extérieur un champ semblable à celui d'un barreau aimanté ;

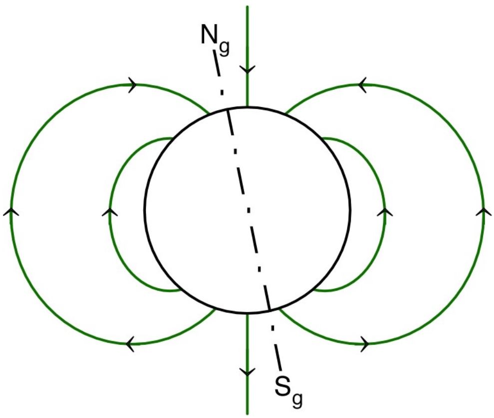
◊ à l'intérieur un champ quasi-uniforme, de norme $B \approx \mu_0\,n\,I$ (indépendante du rayon) avec $n = \frac{N}{L}$.



◊ remarque : une bobine parcourue par un courant se comporte comme un aimant dont les pôles nord et sud sont liés au sens de rotation du courant dans les spires ; en particulier l'orientation du champ ne dépend pas du côté par où arrive le courant, mais uniquement du sens de rotation.



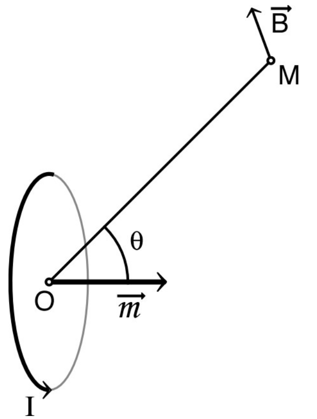
◊ remarque : la terre a un pôle magnétique sud au voisinage du pôle géographique nord et réciproquement (mais l'étude de la croûte terrestre montre que les pôles s'inversent tous les quelques millions d'années).



◊ remarque : le champ magnétique terrestre comporte une composante verticale.

exercices n° I, II et III.

4. Dipôle magnétique

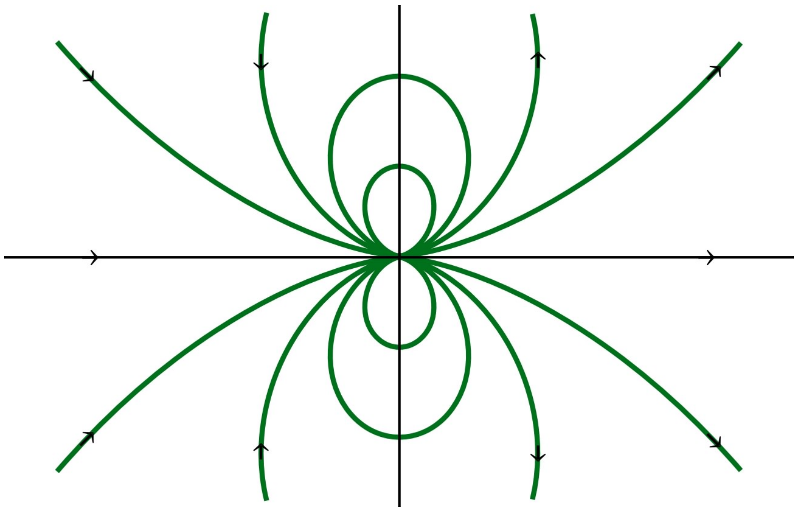


• On appelle “dipôle magnétique” un circuit électrique de type spire (mais non forcément circulaire) de dimension très petite en comparaison de la distance d’observation.

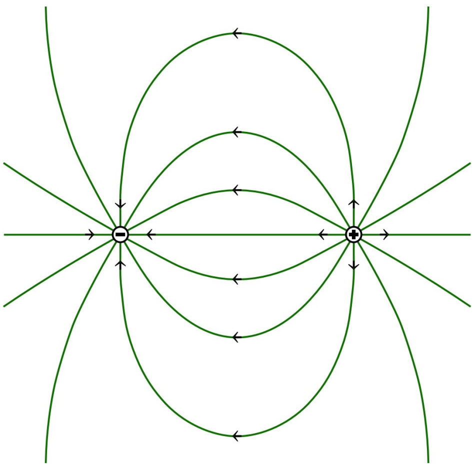
On appelle “moment dipolaire” le “vecteur” $\vec{m} = I\,\vec{S}$ (l’unité de base est $\mathrm{A.m^2}$) où I est le courant dans le circuit et $\vec{S}$ son (pseudo) “vecteur” surface (orienté selon le courant).

• Le champ magnétique d’une spire circulaire peut s’écrire sous une forme analogue à celle du dipôle électrostatique ; en coordonnées sphériques, d’axe Oz orienté selon $\vec{S}$: $\vec{B} = B_r(r,\theta)\,\vec{u}_r + B_\theta(r,\theta)\,\vec{u}_\theta$ (d’après les symétries).

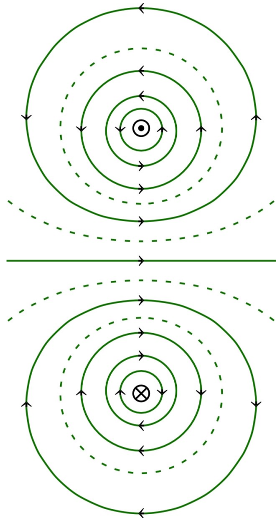
À grande distance : $B_r \approx \frac{2\,\mu_0\,m\,\cos(\theta)}{4\pi\,r^3}$ et $B_\theta \approx \frac{\mu_0\,m\,\sin(\theta)}{4\pi\,r^3}$; correspondant à : $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi\,r^3}\,[3\,(\vec{m}\cdot\vec{u}_r)\,\vec{u}_r - \vec{m}\,]$ avec les lignes de champ suivantes.



◊ remarque : ces calculs ne sont toutefois valables que si la taille de la spire est très petite en comparaison de la distance “d’observation” $r = OM$; ils représentent en effet mal le champ à proximité du dipôle (ceci découle des différences fondamentales entre les propriétés de $\vec{E}$ et $\vec{B}$).



dipôle électrostatique



dipôle magnétique

• De façon analogue au cas électrostatique, la principale action d’un champ $\vec{B}$ “extérieur” sur un dipôle est la tendance à l’orientation :

◊ la force totale est nulle si $\vec{B}$ est uniforme ;

◊ il apparaît un moment de force, qui tend à aligner $\vec{m}$ selon le champ extérieur $\vec{B}$: $\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{m} \times \vec{B}$.

◊ remarque : l’énergie potentielle du dipôle dans le champ extérieur peut s’écrire : $\mathcal{E}_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$; on vérifie ainsi que l’action du moment des forces tend à minimiser $\mathcal{E}_p$.

📖 *exercice n° IV.*