

CHAMP MAGNÉTOSTATIQUE - corrigé des exercices

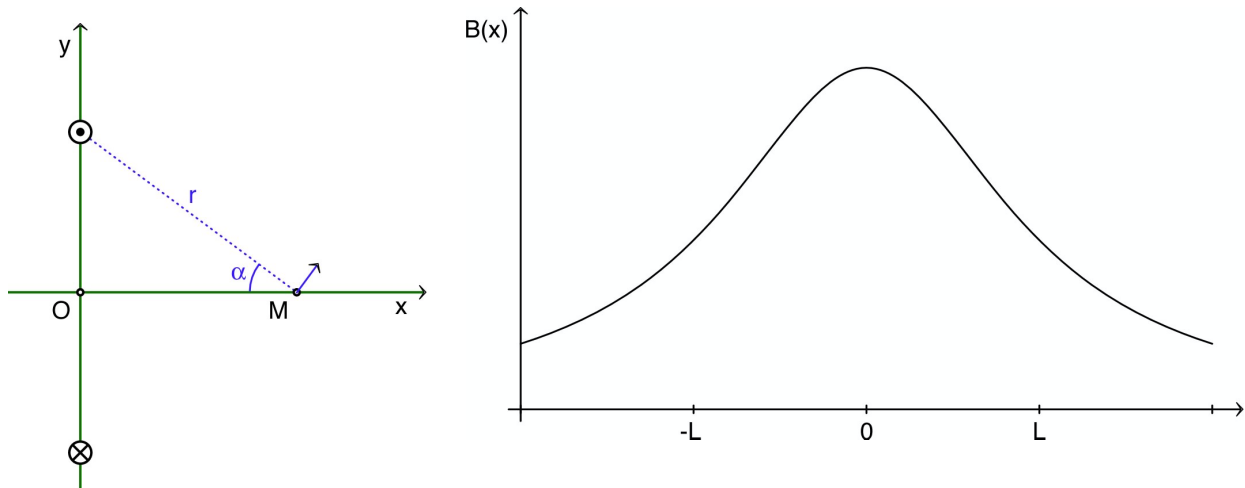
A. EXERCICES DE BASE

I. Bobines "façon Helmholtz"

- 1.a. • La spire est symétrique par rapport aux plans (Oxy) et (Oxz) , mais ces symétries retournent le sens du courant. Il s'agit d'antisymétries électriques donc de symétries magnétiques puisque le champ \vec{B} est un pseudovecteur.
 • En un point M de l'axe (Ox) , donc invariant dans ces symétries, le champ $\vec{B}(M)$ doit être invariant. Il doit donc être symétrique par rapport à ces plans, donc parallèle à leur intersection (Ox) .

- 1.b. • Le champ créé par un fil "infini" est orthoradial et de norme $B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ avec $r = \sqrt{x^2 + L^2}$.
 • Le champ créé par l'ensemble des deux fils est le double de la projection sur (Ox) :

$$B(x) = 2 B_1 \sin(\alpha) = 2 B_1 \frac{L}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{2L}{x^2 + L^2}.$$



2. • En utilisant deux spires identiques mais centrées aux abscisses $\pm a$, on obtient sur l'axe un champ total : $B(x) = \frac{\mu_0 I L}{\pi} \left(\frac{1}{(x+a)^2 + L^2} + \frac{1}{(x-a)^2 + L^2} \right)$.
 • Puisque l'expression précédente est paire, on obtient la meilleure uniformité au voisinage de l'origine en y annulant la dérivée seconde : $\frac{d^2 B}{dx^2}(0) = \frac{\mu_0 I L}{\pi} \frac{2(3a^2 - L^2)}{(a^2 + L^2)^2} = 0$. La distance entre les bobines est alors $D = 2a = \frac{2L}{\sqrt{3}}$.

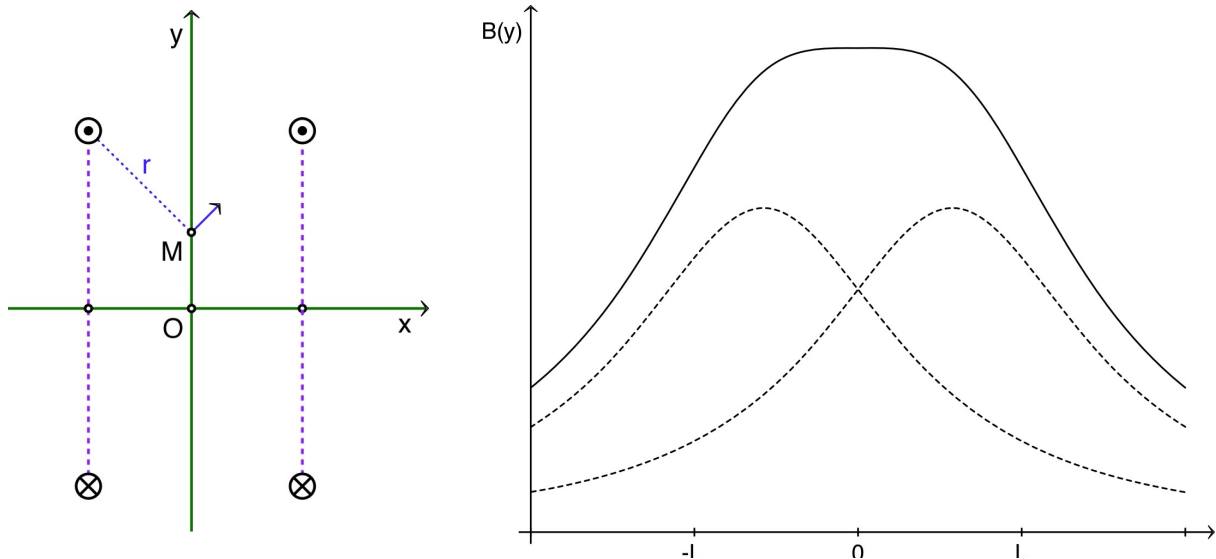
♦ remarque : le développement à l'origine peut alors s'écrire : $B(x) \approx \frac{3\mu_0 I}{2\pi L} \left(1 - \frac{9}{16} \frac{x^4}{L^4} + \dots \right)$.

- 3.a. • L'ensemble des deux spires est symétrique par rapport au plan (Oyz) et cette symétrie ne retourne pas le sens du courant. Il s'agit d'une symétrie électrique donc d'une antisymétrie magnétique puisque le champ \vec{B} est un pseudovecteur.
 • En un point M de l'axe (Oy) , donc invariant dans cette symétrie, le champ $\vec{B}(M)$ doit être invariant. Il doit donc être antisymétrique par rapport à (Oyz) , donc perpendiculaire, c'est à dire selon (Ox) .

- 3.b. • Le champ créé par un fil "infini" est orthoradial et de norme $B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ avec $r = \sqrt{a^2 + (L-y)^2}$.
 • Le champ créé par les deux fils avec courant de même sens est le double de la projection sur (Ox) :

$$B(y) = 2 B_1 \frac{L-y}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{2(L-y)}{a^2 + (L-y)^2}.$$

 • Le champ créé par les deux bobines est au total : $B(y) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{2(L-y)}{a^2 + (L-y)^2} + \frac{2(L+y)}{a^2 + (L+y)^2} \right)$.



- Compte tenu de la valeur $a = \frac{L}{\sqrt{3}}$, le développement en série à l'origine est de la même forme que celui obtenu selon (Ox) : $B(y) \approx \frac{3\mu_0 I}{2\pi L} \left(1 - \frac{9}{16} \frac{y^4}{L^4} + \dots\right)$. La représentation graphique montre que le champ est assez bien uniforme (à 5 %) dans un intervalle de largeur $\approx L$, aussi bien selon (Oy) que selon (Ox) .

II. Champ magnétique créé par une hélice

- ♦ remarque : en coordonnées cylindriques d'axe Oz , l'équation correspondant à la coordonnée radiale est simplement $r = R$; il est en général difficile d'exprimer les coordonnées cylindriques d'un vecteur à partir des coordonnées de ses extrémités, mais ici le seul vecteur qui intervient est \overrightarrow{OM} ; par ailleurs, on ne peut pas intégrer simplement les composantes radiales et orthoradiales car les vecteurs unitaires \vec{u}_r et \vec{u}_θ ne sont pas constants (ils dépendent du point M considéré sur l'hélice), mais l'énoncé ne demande que la projection B_z ; rien n'interdirait donc ici d'utiliser les coordonnées cylindriques ; cependant, comme il s'agit d'un cas très particulier, on peut préférer étudier une méthode plus générale.

• On note M un point quelconque de l'hélice ; d'après la loi de Biot et Savart, le champ en O peut s'écrire : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{OM} \times \vec{u}'_r}{r'^2}$ avec $d\vec{OM} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$; $r' = MO = \sqrt{R^2 + z^2}$; $\vec{u}'_r = \frac{\overrightarrow{MO}}{MO}$.

• Ainsi : $d\vec{OM} \times \overrightarrow{MO} = (x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z) \times (dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z)$ donne en développant :

$$d\vec{OM} \times \overrightarrow{MO} = \left(\frac{h}{2\pi} [\sin(\theta) - \theta \cos(\theta)] \vec{u}_x - \frac{h}{2\pi} [\cos(\theta) + \theta \sin(\theta)] \vec{u}_y + R \vec{u}_z\right) R d\theta.$$

• En projetant l'intégrale vectorielle sur les vecteurs unitaires, on obtient :

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R h}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\theta) - \theta \cos(\theta)}{\left(R^2 + \left(\frac{h\theta}{2\pi}\right)^2\right)^{3/2}} d\theta ; \quad B_y = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R h}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\theta) + \theta \sin(\theta)}{\left(R^2 + \left(\frac{h\theta}{2\pi}\right)^2\right)^{3/2}} d\theta ;$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} R^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(R^2 + \left(\frac{h\theta}{2\pi}\right)^2\right)^{3/2}} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\pi}{h} R^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} dz.$$

♦ remarque : la composante B_y n'est pas simple à calculer (en coordonnées cylindriques, elle correspond à B_r puisque le point O est sur l'axe), mais la composante B_x est nulle par symétrie : c'est l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique (en coordonnées cylindriques, elle correspondrait à B_θ , dépourvue de signification en un point O sur l'axe).

• Avec l'angle α tel que $\tan(\theta) = \frac{z}{R}$ on obtient : $B_z = \frac{\mu_0 I}{2h} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\alpha) d\alpha = \frac{\mu_0 I}{h}$.
- Puisque h est le "pas" de l'hélice, c'est-à-dire la longueur du déplacement selon Oz pour chaque tour, ceci correspond à un "nombre de spires par unité de longueur" : $n = \frac{1}{h}$ (à cela près que si le pas est grand cela n'est qu'une "moyenne" délicate à interpréter).

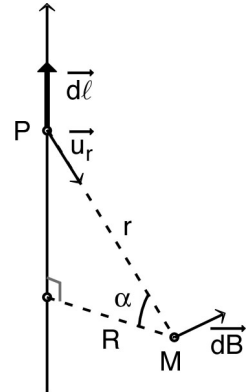
• Pour $h \ll R$ on retrouve par contre le champ magnétique du solénoïde infini : $B_z = \mu_0 n I$.

III. Circuit polygonal

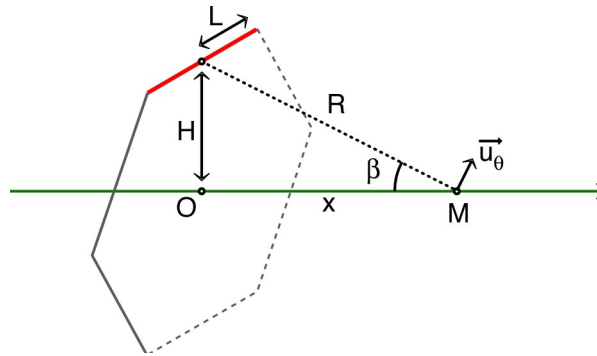
- Pour calculer le champ créé par un circuit polygonal, on peut se ramener à calculer la contribution créée, par un segment de fil de longueur $2L$, en un point M situé à une distance R sur le plan médiateur.
 - En coordonnées cylindriques par rapport au segment, puisque chaque contribution : $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \cos(\alpha) \vec{u}_\theta$ est perpendiculaire au plan défini par le fil et M , alors il en est de même pour \vec{B} total (selon \vec{u}_θ).
 - En intégrant avec $r = \sqrt{R^2 + z^2}$; $\cos(\alpha) = \frac{R}{r}$; $z = R \tan(\alpha)$; $d\ell = dz$; $\lambda = \arctan\left(\frac{L}{R}\right)$; on obtient :

$$dB_\theta = d\vec{B} \cdot \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell \cos(\alpha)}{r^2} ;$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} dz = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{\cos(\alpha)}{R} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{L}{\sqrt{R^2 + L^2}} .$$



- En un point M à l'abscisse x sur l'axe du circuit polygonal, le champ est parallèle à cet axe compte tenu de l'invariance du circuit et de M par rotation de $\frac{2\pi}{n}$ (dans une rotation, un pseudo-vecteur se comporte comme un vecteur). Le champ total peut donc s'écrire $\vec{B} = B_x \vec{u}_x$ avec $B_x = n B_\theta(R) \vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_x$ où \vec{u}_θ correspond aux coordonnées cylindriques par rapport au côté du polygone et où le calcul de R peut être expliqué par un schéma sur un cas particulier (ici $n = 6$) :



- On obtient ainsi : $\vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_x = \sin(\beta) = \frac{H}{R} = \frac{H}{\sqrt{H^2 + x^2}}$ avec $H = L \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$ et au total :
- $$B_x = n \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{L}{\sqrt{H^2 + L^2 + x^2}} \frac{H}{H^2 + x^2} .$$

- Pour la limite $n \rightarrow \infty$ on obtient : $L \rightarrow 0$; $nL \rightarrow \pi R'$; $H \rightarrow R'$ (rayon de la spire circulaire).
 - On retrouve ainsi : $B_x \rightarrow \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R'^2}{(R'^2 + x^2)^{3/2}}$.

IV. Dipôle magnétique

- On peut repérer le point M par ses coordonnées sphériques avec un axe polaire selon l'axe de la spire. Le point M et l'axe définissent un plan méridien ($Or\theta$) qui est plan de symétrie de la spire, mais plan d'antisymétrie électrique.
 - Puisque M est invariant dans cette symétrie, le champ $\vec{B}(M)$ doit être changé de sens. Or il s'agit d'un pseudovecteur ; il doit donc être parallèle au plan : $\vec{B} = B_r \vec{u}_r + B_\theta \vec{u}_\theta$.
 - Enfin, la spire est invariante par rotation selon son axe ; lors d'une rotation d'angle φ , le champ \vec{B} tourne comme la base sphérique et ses coordonnées ne varient pas : $\vec{B} = B_r(r, \theta) \vec{u}_r + B_\theta(r, \theta) \vec{u}_\theta$.
- D'après l'invariance par rotation d'angle φ , on peut arbitrairement choisir $\varphi = 0$ pour le point M . Soit P un point de la spire, on peut le repérer par son angle noté ϕ .

- On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{PM} &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = r \vec{u}_r(\theta) - R \vec{u}_R(\phi) = r.(\cos(\theta) \vec{u}_x + \sin(\theta) \vec{u}_z) - R.(\cos(\phi) \vec{u}_y + \sin(\phi) \vec{u}_z) ; \\
 PM^2 &= r^2 + 2 r R \vec{u}_r \cdot \vec{u}_R + R^2 = r^2 + 2 r R \sin(\theta) \sin(\phi) + R^2 ; \\
 d\vec{\ell} &= R d\phi \vec{u}_\phi(\phi) = R d\phi.(\cos(\phi) \vec{u}_z - \sin(\phi) \vec{u}_y) ; \\
 d\vec{\ell} \times \overrightarrow{PM} &= r R d\phi.(-\sin(\phi) \sin(\theta) \vec{u}_x + \cos(\phi) \cos(\theta) \vec{u}_y + \sin(\phi) \cos(\theta) \vec{u}_z) + R^2 d\phi \vec{u}_x ; \\
 d\vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \overrightarrow{PM}}{PM^3} \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \left(1 - \frac{3R}{r} \sin(\theta) \sin(\phi)\right) d\vec{\ell} \times \overrightarrow{PM} ; \\
 (d\vec{\ell} \times \overrightarrow{PM}) \cdot \vec{u}_r &= R^2 \cos(\theta) d\phi ; \\
 (d\vec{\ell} \times \overrightarrow{PM}) \cdot \vec{u}_\theta &= (r R \sin(\phi) - R^2 \sin(\theta)) d\phi ; \\
 B_r &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} R^2 \cos(\theta) \left(2\pi + \frac{3R}{r} \sin(\theta) \int \sin(\phi) d\phi\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} 2 S \cos(\theta) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} 2 \cos(\theta) ; \\
 B_\theta &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} R^2 \sin(\theta) (2\pi - 3 \int \sin^2(\phi) d\phi) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} S \sin(\theta) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \sin(\theta) .
 \end{aligned}$$

B. EXERCICE D'APPROFONDISSEMENT

V. Expérience de Rowland

- La quantité de charge portée par un anneau entre r et $r + dr$ est $dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$.
- Cette charge fait un tour en une durée $T = \frac{2\pi}{\omega}$; ceci correspond à un courant : $dI = \frac{dq}{T} = \sigma \omega r dr$.
- Sur l'axe d'une spire circulaire de rayon r , parcourue par un courant dI , à une distance a du centre, le champ magnétique est parallèle à l'axe et a pour norme : $dB = \frac{\mu_0 dI r^2}{2 (r^2 + a^2)^{3/2}}$.
- Le champ magnétique total a donc pour norme : $B = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^R \frac{r^3}{(r^2 + a^2)^{3/2}} dr$.
- On peut alors considérer :

$$2 R' = \int_0^R \frac{2 r^3}{(r^2 + a^2)^{3/2}} dr = \int_{a^2}^{a^2 + R^2} \frac{du}{\sqrt{u}} - a^2 \int_{a^2}^{a^2 + R^2} \frac{du}{u^{3/2}} ;$$

$$R' = (\sqrt{a^2 + R^2} - a) + a^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + R^2}} - \frac{1}{a} \right) = 16,3 \text{ cm} ;$$

$$B = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} R' .$$
- Pour des plaques très proches, on peut modéliser par des plans infinis ; le champ électrique entre les plaques est alors uniforme et de norme : $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. La tension est par ailleurs : $U = E d$, d'où la densité de charges $\sigma = \frac{\epsilon_0 U}{d}$ et (compte tenu de la relation $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$) le champ magnétique $B = \frac{U \omega}{2 d c^2} R'$.
- On obtient ainsi : $B = 4,3 \cdot 10^{-10} \text{ T} \ll B_0$.