MF. I - DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS

1. Équation d'Euler

• La résultante des forces pressantes subie par un volume de fluide peut s'écrire : $\vec{F} = -\iint p\, d\vec{S} = -\iiint \vec{\nabla}(p)\, d\tau$.

Pour un élément de volume de fluide, le principe fondamental de la dynamique (en notations lagrangiennes) correspond à : $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}(p) + \frac{\delta\vec{f}}{\delta V}$ (où le dernier terme représente la résultante volumique des autres forces, par exemple $\frac{\delta\vec{f}}{\delta V} = \rho\,\vec{g}$ en présence de la seule pesanteur).

◊ remarque : dans cette partie, on se limite à un fluide parfait, “sans” viscosité.

• En notations eulériennes, ceci peut s'écrire (équation d'Euler) :

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\left(\vec{v}\right) = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(p) + \frac{\delta\vec{f}}{\delta m}$$

où le dernier terme représente la résultante massique des autres forces (par exemple $\frac{\delta\vec{f}}{\delta m} = \vec{g}$ en présence de la seule pesanteur).

◊ remarque : on peut aussi utiliser $\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\left(\vec{v}\right) = \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)$

• Pour un fluide parfait, “sans” transfert thermique, ceci peut s'exprimer en bilan thermodynamique en considérant l'enthalpie : dH = T dS + V dp.

On obtient ainsi pour l'enthalpie massique dans le cas réversible (dS = 0) :

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}(h) + \frac{\delta\vec{f}}{\delta m}.$$

2. Relation de Bernoulli

• On considère un fluide parfait soumis à la seule pesanteur, supposée uniforme : $\vec{g} = -\vec{\nabla}(g\,z)$.

• Pour un écoulement stationnaire, l'équation se simplifie en projection sur une ligne de courant (vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\ell}$) : $\overrightarrow{u_\ell} \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\overrightarrow{u_\ell} \cdot \vec{\nabla}(h + g\,z)$.

> En intégrant selon une ligne de courant on obtient (relation de Bernoulli) :
> $$\frac{v^2}{2} + h + g\,z = \text{Cste} \quad \text{(dépendant de la ligne de courant étudiée).}$$

☞ remarque : pour un écoulement non stationnaire, les lignes de courant ne coïncident généralement pas aux trajectoires des “particules” de fluide : si une telle particule a une vitesse $\vec{v}(t)$ tangente à une ligne de courant $\ell(t)$, puis plus tard une vitesse $\vec{v}(t')$ tangente à $\ell(t')$, alors généralement $\ell(t') \neq \ell(t)$.

3. Fluide irrotationnel ; écoulement potentiel

• Pour un fluide irrotationnel $(\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0})$, on peut exprimer la vitesse à l'aide d'un potentiel Φ : $\vec{v} = -\vec{\nabla}(\Phi)$.

Il est alors possible de généraliser la relation de Bernoulli de façon indépendante des lignes de courant : $-\vec{\nabla}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\vec{\nabla}(h + g\,z)$.

> En intégrant selon une ligne quelconque, on peut généraliser la relation de Bernoulli : $-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + h + g\,z = \text{Cste}$ (indépendante de la ligne étudiée).

4. Fluide incompressible

4.1. Équation de continuité

• La densité de courant massique dans un fluide peut s'écrire $\vec{j} = \rho\,\vec{v}$; le débit de masse sortant d'un volume donné est alors : $-\frac{dm}{dt} = \iint \vec{j}\cdot d\vec{S}$.

La propriété : $-\iiint \frac{\partial\rho}{\partial t}\,d\tau = \iiint \vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{v}\right)\,d\tau$ valide pour tout volume impose :

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{v}\right) = 0 \quad \text{(“relation de continuité”).}}$$

4.2. Fluide incompressible irrotationnel

• D'après la relation de continuité, les fluides incompressibles peuvent être caractérisés par la propriété : $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$.

Pour un fluide irrotationnel, ceci correspond à un potentiel tel que : $\vec{v} = -\vec{\nabla}(\Phi)$ avec $\Delta\Phi = 0$.

• remarque : en pratique, un fluide rotationnel correspond à des lignes de courant refermées sur elles mêmes.

• On obtient dans ce cas : $\vec{\nabla}(h) = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(p) = \vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}\right)$; la relation de Bernoulli généralisée peut donc s'écrire :

$$\boxed{-\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g\,z = \text{Cste} \quad \text{(indépendante de la ligne étudiée).}}$$

4.3. Fluide incompressible (rotationnel)

• La relation $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ caractérisant les fluides incompressibles permet d'exprimer la vitesse à l'aide d'un potentiel vecteur $\vec{\mathcal{A}}$: $\vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{A}}$.

Cette méthode n'est toutefois vraiment efficace que pour un écoulement rotationnel : $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \overrightarrow{OM}$, correspondant à : $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 2\vec{\Omega}$.

On obtient en effet dans ce cas : $\Delta\vec{\mathcal{A}} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{A}}\right) - \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{A}}\right) = -2\vec{\Omega}$.

◊ remarque : pour un fluide irrotationnel, cela correspond à $\Delta\vec{\mathcal{A}} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{A}}\right)$.

🕮 *exercices n° (à suivre... mais cette rubrique n'est pas prioritaire).*