DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS - corrigé des exercices

I. Vidage d'un récipient cylindrique

a. • En comparant la surface libre du liquide et la sortie de l'écoulement, la loi de Bernoulli peut s'écrire : $p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = p_0 + \frac{1}{2}\rho V^2$ où $v = -\frac{dz}{dt}$ est la vitesse de descente en surface, tandis que $V = \frac{D}{s}$ est la vitesse de l'écoulement (en fonction du débit D).

• L'incompressibilité impose $Sv = sV = D$ donc $v = \frac{D}{S}$; par suite : $v^2 + 2gz = v^2.\left(\frac{S}{s}\right)^2$.

• On en déduit : $\frac{dz}{\sqrt{z}} = -\alpha\, dt$, en posant : $\alpha = \sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{S}{s}\right)^2 - 1}}$, ce qui donne : $z = \left(\sqrt{h} - \frac{\alpha}{2}t\right)^2$.

b. • On en déduit la durée de vidage : $T = \frac{2\sqrt{h}}{\alpha} = \sqrt{\frac{2h.\left(\left(\frac{S}{s}\right)^2 - 1\right)}{g}}$.

II. Écoulement à abaissement uniforme

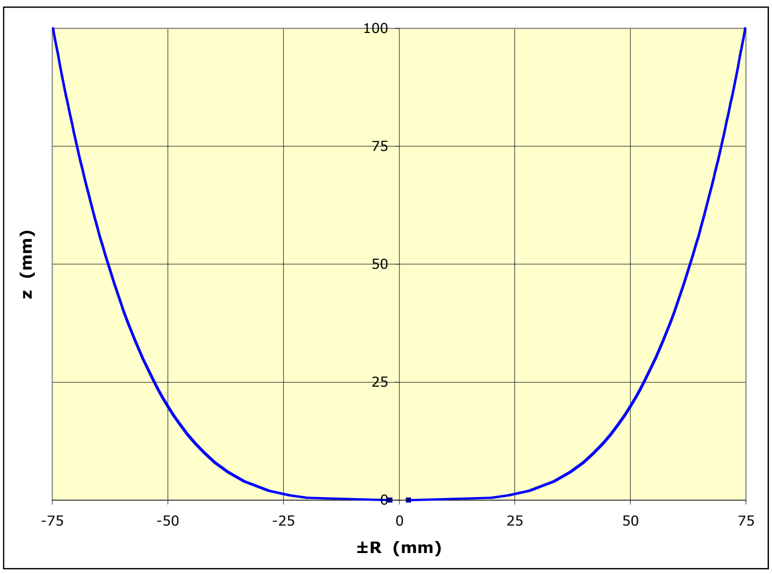
a. • En comparant la surface libre du liquide et la sortie de l'écoulement, la loi de Bernoulli peut s'écrire : $p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = p_0 + \frac{1}{2}\rho V^2$ où $v = -\frac{dz}{dt}$ est la vitesse (constante) de descente en surface, tandis que $V = \frac{D}{s}$ est la vitesse de l'écoulement (en fonction du débit D).

• L'incompressibilité impose $Sv = sV = D$ donc $v = \frac{D}{S}$; par suite : $v^2 + 2gz = v^2.\left(\frac{S}{s}\right)^2$.

• On en déduit : $S(z) = s.\sqrt{1 + \frac{2gz}{v^2}}$ ce qui montre que le problème semble avoir une solution.

b. • En notant r le rayon du tube d'écoulement, on en déduit : $R(z) = r.\sqrt[4]{1 + \frac{2gz}{v^2}}$.

◊ remarque : cela correspond à l'allure suivante :



III. Écoulement à débit constant

a. • En comparant la surface libre du liquide et la sortie de l'écoulement, la loi de Bernoulli peut s'écrire : $p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = p_0 + \frac{1}{2}\rho V^2$ où $v = -\frac{dz}{dt}$ est la vitesse de descente en surface, tandis que $V = \frac{D}{s}$ est la vitesse (constante) de l'écoulement.

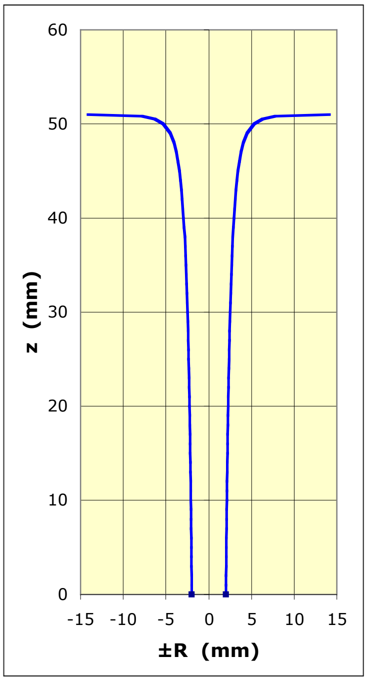
• L'incompressibilité impose $Sv = sV = D$ donc $v = \frac{D}{S}$; par suite : $\left(\frac{D}{S}\right)^2 + 2gz = \left(\frac{D}{s}\right)^2$.

• On en déduit : $S(z) = \frac{s}{\sqrt{1 - \frac{2gz}{V^2}}}$ ce qui montre que le problème semble avoir une solution.

◊ remarque : la vitesse d'écoulement est liée à la hauteur h du récipient par la relation : $V^2 = 2gh$, ce qui correspond aussi à la chute libre d'une hauteur h avec vitesse initiale nulle.

b. • En notant r le rayon du tube d'écoulement, on en déduit : $R(z) = \frac{r}{\sqrt[4]{1 - \frac{2gz}{V^2}}}$.

◊ remarque : cela correspond à l'allure ci-contre, qui montre le peu d'intérêt du dispositif ; en particulier l'hypothèse d'écoulement quasi-stationnaire (et non turbulent) est peu crédible.



IV. Écoulement d'un fluide autour d'une boule en mouvement

1.a. • Il faut ne pas confondre le repère (éventuellement mobile) utilisé pour noter les calculs du point de vue mathématique, avec le référentiel par rapport auquel on considère le mouvement. Le mouvement du centre de la boule, par rapport auquel sont centrées les coordonnées sphériques envisagées, n'est pas plus gênant que la variation des vecteurs unitaires de la base sphérique, qui de toute façon dépendent de la position du point considéré. Il faut par contre, évidemment, en tenir compte dans les calculs.

1.b. • Le fluide incompressible, caractérisé par $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, peut être décrit par un écoulement potentiel : $\vec{v} = -\vec{\nabla}(\Phi)$ avec $\Delta\Phi = 0$.

• Puisque l'équation est linéaire, on peut chercher à décomposer une solution quelconque sous forme de superposition de solutions particulières. La forme de la boule conduit à raisonner en coordonnées sphériques, les solutions particulières peuvent alors être recherchées sous la forme $\Phi(r, \theta, \varphi) = f(r).Y(\theta, \varphi)$.

1.c. • En reportant dans l'expression du laplacien, on peut séparer les variables :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \ ;$$

$$Y.\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{df}{dr}\right) + f.\left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta) \frac{\partial Y}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2}\right) = 0 \ ;$$

$$\frac{1}{f}.\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{df}{dr}\right) = -\frac{1}{Y}.\left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta) \frac{\partial Y}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2}\right).$$

• Puisque le membre de gauche dépend seulement de r et celui de droite seulement des angles, il ne peut s'agir que d'une constante, par exemple λ, d'où les équations indiquées.

2.a. • L'équation radiale peut s'écrire : $r^2 \frac{d^2f}{dr^2} + 2r \frac{df}{dr} - \lambda f = 0$, équation linéaire à coefficients polynômes. On peut chercher une solution particulière sous la forme r^α, ce qui impose : $\alpha.(\alpha - 1) + 2\alpha - \lambda = 0$; la constante α est ainsi solution de : $\alpha.(\alpha + 1) = \lambda$.

• Puisque la somme des deux racines est -1, si on note α la première, la seconde est $-(\alpha - 1)$. On peut donc écrire la solution générale sous la forme : $f(r) = A\, r^\alpha + \frac{B}{r^{\alpha+1}}$ (où A et B sont deux constantes).

◊ remarque : c'est bien la solution générale puisque l'équation est du second ordre et qu'il y a deux constantes d'intégration.

2.b. • La vitesse du fluide doit s'annuler à l'infini, donc il faut se limiter aux exposants strictement négatifs.

3.a. • On envisage en pratique un régime laminaire en l'absence de turbulences : cas irrotationnel. L'effet prépondérant dans le mouvement du fluide est dans ce cas le transfert de quantité de mouvement, proportionnel à la vitesse relative (au contraire du régime turbulent, où l'effet prépondérant est associé à un transfert d'énergie cinétique, proportionnel au carré de la vitesse). La transition entre les deux se produit lorsque la vitesse augmente au delà d'une limite caractérisée par le nombre de Reynolds. Ainsi, l'écoulement envisagé correspond logiquement aux faibles vitesses, avec un potentiel linéaire en fonction de $\vec{\upsilon}$.

3.b. • La seule façon d'obtenir un potentiel scalaire, linéaire en $\vec{\upsilon}$ et de dépendance radiale en $\frac{1}{r^{\alpha+1}}$, consiste à supposer Φ proportionnel à $\vec{\upsilon}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^\alpha}\right)$.

3.c. • En présence de pesanteur, l'équation différentielle étant linéaire, on serait de même amené à ajouter un terme linéaire en $\vec{g}$, donc proportionnel à $\vec{g}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^\alpha}\right)$. Mais un tel terme décrirait un effet de chute d'ensemble du fluide, non pertinent si ce dernier est contenu dans un récipient limité : il apparaît une surpression, conforme à la loi d'Archimède et compensant la pesanteur (la somme des deux effets a une influence nulle sur l'écoulement du fluide).

3.d. • La relation $\vec{v}\cdot\vec{u_r} = \vec{\upsilon}\cdot\vec{u_r}$ exprime le fait que la composante radiale de la vitesse du fluide doit être égale à celle du solide : à l'avant, la boule pousse le fluide ; à l'arrière, il n'y a pas d'espace vide entre la boule et le fluide.

◊ remarque : par contre, les composantes tangentielles ne sont généralement pas égales ; le fluide peut “glisser” le long de la surface du solide.

3.e. • La forme obtenue pour le potentiel varie comme $\cos(\theta)$ et est indépendante de φ.

• Or, l'équation angulaire s'écrit : $\frac{1}{Y}.\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right) = -\lambda$.

• En cherchant les solutions sous la forme $Y(\theta, \varphi) = F(\theta).G(\varphi)$ on peut séparer les variables :

$$\frac{1}{F}.\left(\sin(\theta)\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\frac{dF}{d\theta}\right) + \lambda\sin^2(\theta)\,F\right) = -\frac{1}{G}.\frac{d^2G}{d\varphi^2} = \lambda_\varphi.$$

• Les solutions périodiques de $\frac{d^2G}{d\varphi^2} + \lambda_\varphi\, G = 0$ sont de la forme $\cos\left(\sqrt{\lambda_\varphi}\theta\right)$ ou $\sin\left(\sqrt{\lambda_\varphi}\theta\right)$; mais on obtient ici une indépendance par rapport à φ, ce qui correspond à $\lambda_\varphi = 0$.

• Ceci impose donc $\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\frac{dF}{d\theta}\right) + \lambda\, F = 0$. Cette équation peut être réécrite avec les notations $\zeta = \cos(\theta)$ et $F(\theta) = P(\zeta)$ (polynômes de Legendre) : $(1 - \zeta^2)\,\frac{d^2P}{d\zeta^2} - 2\,\zeta\,\frac{dP}{d\zeta} + \lambda\, P = 0$.

• La forme de la solution variant comme $\cos(\theta) = \zeta$, l'équation se limite à : $-2\,\zeta + \lambda\,\zeta = 0$, c'est à dire $\lambda = \alpha.(\alpha + 1) = 2$ donc en pratique $\alpha = 1$.

3.f. • On considère le potentiel $\Phi = \beta\ \vec{\upsilon}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\beta}{r^2}\ \vec{\upsilon}\cdot\vec{u_r} = -\frac{\beta}{r^2}\ \upsilon\cos(\theta)$; ceci donne :

$$\vec{v} = -\vec{\nabla}(\Phi) = -\frac{\beta}{r^3}\ \upsilon.(2\cos(\theta)\ \vec{u_r} + \sin(\theta)\ \vec{u_\theta}).$$

• À la surface de la boule, la condition : $\vec{v}\cdot\vec{u_r} = \vec{\upsilon}\cdot\vec{u_r}$ correspond à : $-2\frac{\beta}{R^3}\ \upsilon\cos(\theta) = \upsilon\cos(\theta)$ donc $\beta = -\frac{R^3}{2}$.

• D'après $\vec{\upsilon} = \upsilon\cos(\theta)\ \vec{u_r} - \upsilon\sin(\theta)\ \vec{u_\theta}$, on obtient finalement :

$$\vec{v} = \frac{R^3}{2r^3}\ \upsilon.(2\cos(\theta)\ \vec{u_r} + \sin(\theta)\ \vec{u_\theta}) = \frac{R^3}{2r^3}\ \left(\left(3\vec{\upsilon}\cdot\vec{u_r}\right)\vec{u_r} - \vec{\upsilon}\right).$$

◊ remarque : cette expression est analogue à celle du dipôle électrostatique ; ce n'est pas indépendant du fait que l'avant de la boule se comporte comme une “source” de liquide (poussé en avant) et que l'arrière se comporte comme un “puits” de liquide (il s'arrête après avoir contourné la boule).

4.a. • La relation de Bernoulli peut s'écrire (en négligeant la pesanteur) : $-\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho}$ (valeur constante, mesurée à l'infini).

4.b. • Le potentiel Φ est exprimé ci-dessus (selon un repère mobile) en un point fixe par rapport à la boule. Pour raisonner en notations eulériennes (en un point fixe par rapport au référentiel), il faut utiliser une dérivée composée : $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{\upsilon}\cdot\vec{\nabla}(\Phi)$.

4.c. • D'après ce qui précède :

$$\Phi = \frac{R^3}{2r^2}\vec{\upsilon}\cdot\vec{u_r} \quad ; \quad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{R^3}{2r^2}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot\vec{u_r} \quad \text{(en un point fixe par rapport à la boule) ;}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{d\Phi}{dt} - \vec{\upsilon}\cdot\vec{\nabla}(\Phi) = \frac{R^3}{2r^2}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot\vec{u_r} + \vec{\upsilon}\cdot\vec{v} \quad \text{(en un point fixe par rapport au référentiel) ;}$$

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho\upsilon^2\left(\frac{R^3}{2r^3}\right)^2[3\cos^2(\theta) + 1] + \rho\ \frac{R^3}{2r^2}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot\vec{u_r} + \rho\upsilon^2\ \frac{R^3}{2r^3}\ [3\cos^2(\theta) - 1] \ ;$$

$$p = p_0 + \frac{1}{8}\rho\upsilon^2\ [9\cos^2(\theta) - 5] + \rho\ \frac{R}{2}\ \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot\vec{u_r} \quad \text{(à la surface de la boule : } r = R).$$

◊ remarque : dans la dérivation de $\vec{\upsilon}\cdot\vec{u_r} = \upsilon\cos(\theta)$ en un point fixe, l'angle peut changer sans que $\vec{u_r}$ varie, mais parce que l'axe polaire de direction $\vec{\upsilon}$ varie : $\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot\vec{u_r} = \frac{d\upsilon}{dt}\cos(\theta) - \upsilon\sin(\theta)\ \frac{d\theta}{dt}$.

4.d. • La résultante est : $\vec{F} = \iint p\, d\vec{S}$ avec $d\vec{S} = -R^2\sin(\theta)\ d\theta\ d\varphi\ \vec{u_r}$; l'intégration des termes constants donne forcément une contribution nulle par symétrie.

• Ainsi : $\vec{F} = -\frac{9}{8}\rho\upsilon^2\ R^2 \iint \cos^2(\theta)\sin(\theta)\,\vec{u_r}\ d\theta\ d\varphi - \rho\ \frac{R^3}{2}\ \iint\left(\frac{d\upsilon}{dt}\cos(\theta) - \upsilon\sin(\theta)\frac{d\theta}{dt}\right)\sin(\theta)\,\vec{u_r}\ d\theta\ d\varphi$.

• Par symétrie, l'intégration sur φ donne une contribution nulle perpendiculairement à l'axe polaire ; le premier terme est donc ainsi nul : $\upsilon\iint\cos^2(\theta)\sin(\theta)\,\vec{u_r}\ d\theta\ d\varphi = 2\pi\vec{\upsilon}\int_0^\pi\cos^3(\theta)\sin(\theta)\ d\theta = \vec{0}$.

• Dans le second terme :

$$\upsilon\iint\frac{d\upsilon}{dt}\cos(\theta)\sin(\theta)\,\vec{u_r}\ d\theta\ d\varphi = 2\pi\vec{\upsilon}\ \frac{d\upsilon}{dt}\int_0^\pi\cos^2(\theta)\sin(\theta)\ d\theta = \frac{4\pi}{3}\ \vec{\upsilon}\ \frac{d\upsilon}{dt} \ ;$$

$$\iint\upsilon\sin^2(\theta)\frac{d\theta}{dt}\,\vec{u_r}\ d\theta\ d\varphi = 2\pi\vec{\upsilon}\ \frac{d\theta}{dt}\int_0^\pi\cos(\theta)\sin^2(\theta)\ d\theta = \vec{0}.$$

• Finalement la force de traînée a pour expression : $\vec{F} = -\rho\,\frac{2\pi R^3}{3}\,\frac{d\upsilon}{dt}\,\frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon}$ (dépendant de la projection de $\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ sur la direction de $\vec{\upsilon}$).

◊ remarque : dans ce calcul, on a omis l'effet de la pesanteur ; pour en tenir compte il suffirait d'augmenter la pression d'un terme correspondant dont l'intégrale redonnerait la poussée d'Archimède classique.

4.e. • Dans le calcul précédent, le terme proportionnel à υ^2 est nul car il décrit deux effets qui se compensent : le fluide à l'avant de la boule doit subir une surpression pour être mis en mouvement ; mais, après avoir contourné la boule, ce même fluide doit aussi subir une surpression pour être ralenti et s'immobiliser.

◊ remarque : ceci est lié à la vitesse d'écoulement, indépendamment de l'accélération de la boule.

• Au contraire, le terme proportionnel à $\frac{d\upsilon}{dt}$ décrit le fait que l'écoulement du fluide doit être globalement accéléré si le mouvement de la boule l'est ; c'est de ce terme que vient la force de traînée.

◊ remarque : on constate que l'effet de l'accélération ne se fait sentir que dans la direction de la vitesse, ce qui n'est pas évident a priori ; on peut toutefois concevoir qu'il n'y ait pas d'accélération “en rotation” du fluide : au lieu de déplacer le même fluide en rotation, c'est d'autre fluide (décalé d'un certain angle) qui est mis en mouvement (la situation est alors probablement différente en tenant compte de la viscosité).

☞ **remarque** : la “poussée d'Archimède” dans le cas statique est une force opposée au poids du fluide “déplacé” (c'est-à-dire “à la place” duquel se solide est introduit) ; cette force, non calculée ici puisque la pesanteur a été supposée sans effet, revient à remplacer la masse pesante de la boule par une masse diminuée de celle du fluide déplacé : $m - m_d$; l'effet considéré ici montre qu'en outre, dans les situations hors d'équilibre, le système déplacé n'est pas la boule mais l'ensemble {boule + fluide} ; dans le cas d'un mouvement rectiligne, ceci revient à remplacer la masse inerte de la boule par une masse augmentée de celle du fluide entrainé : $m + m_e$; pour une boule dans un fluide parfait, on obtient ci-dessus $m_e = \frac{1}{2} m_d$; cet effet (souvent non négligeable) est hélas ignoré par de très nombreux manuels scolaires !

V. Lignes de courant dans un dièdre

1.a. • Le fluide incompressible, caractérisé par $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$, peut être décrit par un écoulement potentiel : $\vec{v} = -\vec{\nabla}(\Phi)$ avec $\Delta\Phi = 0$. On utilise des coordonnées cylindriques dont l'axe cylindrique (Oz) correspond à l'arête du dièdre.

• L'écoulement selon un plan perpendiculaire à l'arête correspond à : $z = $ Cste et $v_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0$. On cherche donc les solutions sous la forme $\Phi(r, \theta)$.

• L'équation selon (Oxy) peut donc s'écrire : $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} = 0$; on peut chercher les solutions sous la forme $\Phi(r, \theta) = F(r).G(\theta)$ en séparant les variables : $\frac{1}{F}.\left(r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dF}{dr}\right)\right) = -\frac{1}{G}.\frac{d^2G}{d\theta^2}$.

• Puisque les deux membres s'expriment uniquement en fonction de variables indépendantes, ils correspondent forcément à une constante. L'équation angulaire est donc de la forme : $\frac{d^2G}{d\theta^2} + \lambda\, G = 0$. Selon la valeur de λ, les solutions sont des combinaisons d'exponentielles ou de sinusoïdes, mais ici :

◊ la composante v_θ déduite de $\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$ doit s'annuler sur la paroi, pour $\theta = 0$ et $\theta = \alpha$;

◊ la solution plausible est donc de la forme : $G \propto \cos(\beta\theta)$ avec $\lambda = \beta^2$ et $\beta = \frac{\pi}{\alpha}$.

• L'équation radiale est alors de la forme : $r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dF}{dr}\right) - \lambda\, F = 0$. On peut chercher une solution particulière sous la forme r^κ, ce qui impose : $\kappa^2 = \lambda$ et $F = A\, r^\beta + B\, r^{-\beta}$.

◊ remarque : étant donné qu'on obtient deux constantes d'intégration pour une équation différentielle linéaire du second ordre, cette solution est la plus générale.

• Pour $\alpha < \pi$, l'arête impose des conditions d'arrêt ; il faut donc que la vitesse s'y annule : ceci donne finalement : $\Phi = A\ r^{\beta} \cos(\beta\theta)$. La constante d'intégration ne peut pas être déterminée car l'énoncé ne précise pas de conditions aux limites.

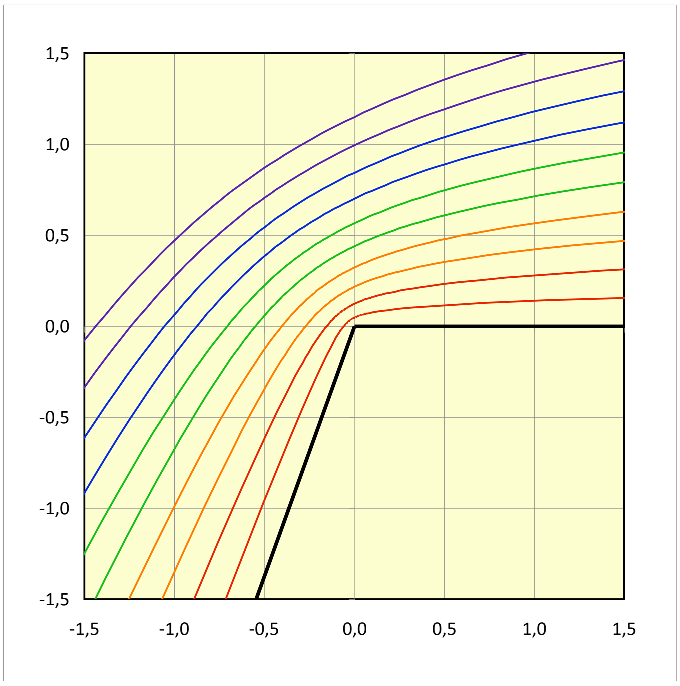
• On en déduit l'expression de la vitesse : $\vec{v} = -\vec{\nabla}(\Phi) = A\beta\ r^{\beta - 1} \left(\cos(\beta\theta)\,\vec{u_r} - \sin(\beta\theta)\,\vec{u_\theta}\right)$.

• Pour $\alpha > \pi$, on peut de même raisonnablement proposer par analogie (et par continuité pour le cas $\alpha = \pi$) : $\Phi = A\ r^{\beta} \cos(\beta\theta)$ et $\vec{v} = A\beta\ r^{\beta - 1} \left(\cos(\beta\theta)\,\vec{u_r} - \sin(\beta\theta)\,\vec{u_\theta}\right)$, mais cela donne une limite infinie pour la vitesse au niveau de l'arête. Ce comportement vient de la modélisation idéalisée d'une arête parfaitement anguleuse : en réalité, ou bien il y a un léger arrondi et la limite $r = 0$ n'est pas atteinte, ou bien il y a un léger décollement des lignes de courant (la vitesse du fluide a une norme qui doit augmenter pour passer l'obstacle et elle ne peut pas s'annuler, or la direction ne peut pas changer brutalement sans annulation de la norme).

1.b. • Les lignes de courant, parallèles à la vitesse, sont perpendiculaires à l'axe (Oz) et correspondent à :

$$\frac{dr}{\cos(\beta\theta)} = -\frac{r\,d\theta}{\sin(\beta\theta)}.$$

• Elles ont donc des équations de la forme : $\beta\ \ln(r) + \ln\left(\sin(\beta\theta)\right) = \text{Cste}$, ou encore : $r^{\beta} \sin(\beta\theta) = \text{Cste}$.



2.a. • L'écoulement d'un fluide “franchissant” l'arête correspond à un champ de vitesse indépendant de z (invariance par translation parallèlement à l'arête) : $\vec{v} = \vec{v}(r, \theta)$.

◊ remarque : ceci ne signifie pas que la vitesse d'une particule de fluide (description lagrangienne) reste constante lorsque la coordonnée de particule varie au cours du mouvement, car la vitesse dépend de θ et φ, qui varient lors du mouvement ; il s'agit ici d'une description eulérienne.

• En particulier, l'invariance par translation impose $v_z = -\left[\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right]_{r\theta} = v_z(r, \theta)$ soit une constante en tant que fonction de z (dépendant par contre de r et θ). Ceci correspond à chercher les solutions sous la forme affine par rapport à z : $\Phi(r, \theta, z) = \Phi_1(r, \theta)\ z + \Phi_0(r, \theta)$.

• On obtient alors : $v_r = -z \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\right]_{\theta} - \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial r}\right]_{\theta} = v_r(r, \theta)$ et $v_\theta = -\frac{z}{r} \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta}\right]_{r} - \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta}\right]_{r} = v_\theta(r, \theta)$ (constantes en tant que fonctions de z) ; ceci impose $\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\right]_{\theta} = 0$ et $\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta}\right]_{r} = 0$, c'est-à-dire que Φ_1 est une constante (qu'on peut noter $-v_z$) : $\Phi(r, \theta, z) = -v_z\ z + \Phi_0(r, \theta)$.

◊ remarque : on aurait pu essayer de séparer les variables en cherchant des solutions particulières sous la forme d'un produit $f(r, \theta).h(z)$; toutefois, si cette méthode peut donner des solutions satisfaisantes du point de vue mathématique, elle peut n'aboutir à aucune solution satisfaisante du point de vue physique ; la forme de la solution précédente montre que c'est ici le cas.

• L'équation de Laplace étant linéaire, ceci se ramène à considérer séparément les deux termes ; on obtient ainsi (d'après la question précédente) : $\Phi_0(r, \theta) = A\ r^{\beta} \cos(\beta\theta)$.

• On en déduit l'expression de la vitesse : $\vec{v} = -\vec{\nabla}(\Phi) = A\beta\, r^{\beta - 1} \left(\cos(\beta\theta)\,\vec{u_r} - \sin(\beta\theta)\,\vec{u_\theta}\right) + v_z\,\vec{u_z}$.

2.b. • En projection sur un plan perpendiculaire à l'axe (Oz), les lignes de courant $r(\theta)$ sont les mêmes que celles de la question précédente.

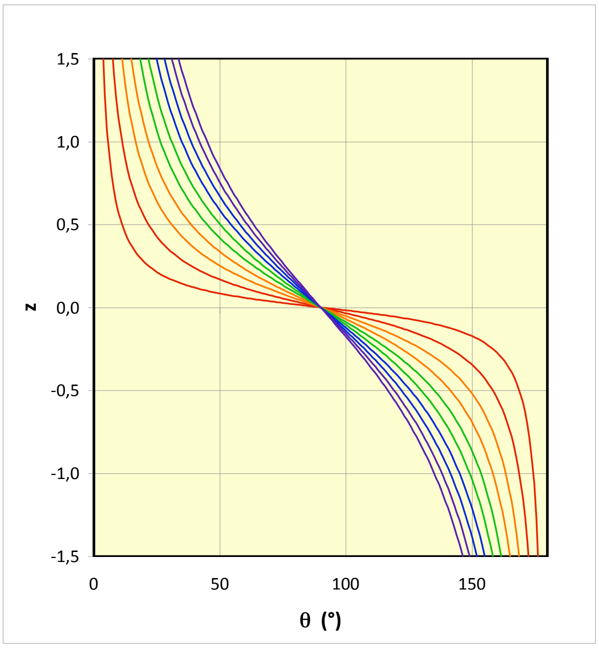
• Ayant déterminé $r(\theta)$ d'après la forme : $r^\beta \sin(\beta\theta) = r_0^{\ \beta}$ et en posant $A' = \dfrac{v_z r_0^{\ 2-\beta}}{A\beta}$, l'étude de $z(\theta)$ donne par ailleurs : $\dfrac{dz}{v_z} = -\dfrac{r^{2-\beta}\,d\theta}{A\beta\sin(\beta\theta)}$; $dz = -A'\left(\sin(\beta\theta)\right)^{-2/\beta} d\theta$.

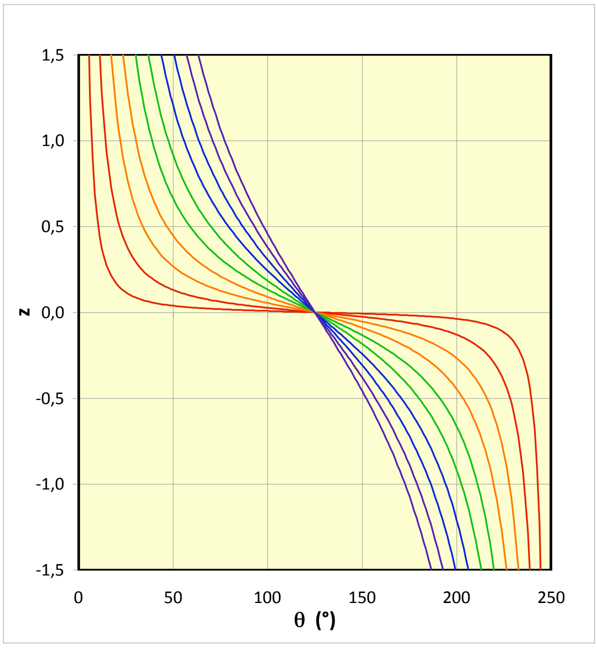
• Il n'y a pas d'intégration analytique, mais on peut résoudre numériquement, par exemple par la méthode d'Euler. Cela est d'autant plus facile que l'expression ne dépend pas explicitement de z et que toutes les courbes se déduisent par simple proportionnalité.

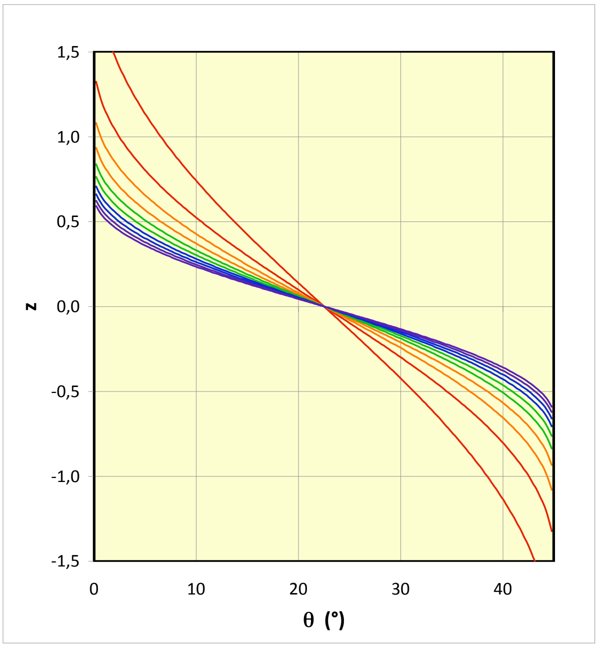
• Pour $\alpha = \pi$, la variation décrit simplement l'arctangente du déplacement axial par rapport au déplacement angulaire (les lignes de courant sont des droites, parcourues à vitesse constante ; l'effet angulaire est d'autant plus marqué pour le fluide passant près de l'arête).

• Pour $\alpha > \pi$, la variation angulaire est d'autant plus accentuée que le fluide passe près de l'arête (et tend même vers l'infini si l'arête est “parfaitement” anguleuse).

• Pour $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$, la variation angulaire est d'autant plus faible que le fluide passe près de l'arête (et tend même vers zéro si l'arête, “parfaitement” anguleuse, impose un “point d'arrêt).







3.a. ◊ remarque : de même que la description de la vitesse à l'aide d'un potentiel scalaire comporte une analogie avec l'électrostatique, l'utilisation d'un potentiel vecteur admet une analogie avec la magnétostatique.

• Pour un écoulement irrotationnel, on peut chercher le potentiel vecteur comme solution de l'équation : $\Delta\vec{\mathcal{A}} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{A}}\right)$.

• D'après les symétries du dispositif, on peut chercher les solutions sous la forme $\vec{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_z\,\vec{u_z}$ (dans la suite, on omet l'indice z pour simplifier). Ceci correspond à : $0 = \frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial r\partial z}$; $0 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial\theta\partial z}$; $\Delta\mathcal{A} = \frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial z^2}$.

• La première équation montre que $\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial r} = f_0(r, \theta)$ dont on déduit : $\mathcal{A} = F_0(r, \theta) + G_0(z, \theta)$. Ceci impose par ailleurs $\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z} = g_0(z, \theta)$ donc la seconde équation impose $g_0(z, \theta) = g_0(z)$ puis finalement en reportant : $\mathcal{A} = F_0(r, \theta) + G_0(z)$.

• Pour un écoulement perpendiculaire à l'arête, la vitesse est $\vec{v} = \vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{A}} = \frac{1}{r}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\theta}\vec{u_r} - \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial r}\vec{u_\theta}$. La forme précédente montre que le terme $G_0(z)$ n'intervient pas et qu'on peut se limiter à rechercher les solutions sous la forme $\mathcal{A}(r, \theta)$. La troisième équation donne donc finalement : $\Delta\mathcal{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial\theta^2} = 0$.

• Par analogie à la question (1), compte tenu du fait que la composante v_θ déduite de $-\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial r}$ doit s'annuler sur la paroi, pour $\theta = 0$ et $\theta = \alpha$, on aboutit à : $\mathcal{A} = A\,r^\beta\sin(\beta\theta)$.

• On en déduit l'expression de la vitesse : $\vec{v} = \vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{A}} = A\beta\,r^{\beta-1}\left(\cos(\beta\theta)\,\vec{u_r} - \sin(\beta\theta)\,\vec{u_\theta}\right)$.

3.b. • On obtient les lignes de courant de la même façon que dans la question (1), mais on peut remarquer qu'elles correspondent à des équations de la forme $\mathcal{A} = \text{Cste}$.

3.c. • L'écoulement d'un fluide “franchissant” l'arête correspond à un champ de vitesse indépendant de z (invariance par translation parallèlement à l'arête) : $\vec{v} = \vec{v}(r, \theta)$.

• Les équations étant linéaires, on peut décomposer la solution en une somme de ses projections parallèlement et perpendiculairement à l'arête. Cette dernière partie suit les mêmes équations que précédemment et est donc de la même forme.

• La projection selon l'arête correspond à $v_z = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\mathcal{A}_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial\mathcal{A}_r}{\partial\theta}\right)$ et peut être décrite par un potentiel vecteur perpendiculaire à l'arête : $\vec{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_r\,\vec{u_r} + \mathcal{A}_\theta\,\vec{u_\theta}$.

• Une vitesse parallèle à l'arête correspond à : $v_r = -\frac{\partial\mathcal{A}_\theta}{\partial z} = 0$ et $v_\theta = \frac{\partial\mathcal{A}_r}{\partial z} = 0$; donc le potentiel vecteur associé est indépendant de z.

• Pour un écoulement irrotationnel, on peut chercher le potentiel vecteur comme solution de l'équation : $\Delta\vec{\mathcal{A}} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{A}}\right)$. De façon inattendue, les propriétés associées à cette loi sont plus faciles à exploiter en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial^2\mathcal{A}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathcal{A}_x}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{A}_y}{\partial y}\right) \ ; \ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\mathcal{A}_x}{\partial y} - \frac{\partial\mathcal{A}_y}{\partial x}\right) = 0 \ ; \ v_z(x, y) = v_z(x) \ ;$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{A}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathcal{A}_y}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mathcal{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{A}_y}{\partial y}\right) \ ; \ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathcal{A}_x}{\partial y}\right) = 0 \ ; \ v_z(x) = v_z \ \text{(constante)}.$$

• En reportant dans $\frac{\partial(r\mathcal{A}_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial\mathcal{A}_r}{\partial\theta} = r\,v_z$ on constate qu'on peut choisir arbitrairement $\mathcal{A}_r = 0$, ce qui impose $\mathcal{A}_\theta = \frac{r}{2}v_z + \frac{C(\theta)}{r}$ où la fonction $C(\theta)$ peut être choisie nulle arbitrairement.

• On obtient donc finalement au total : $\vec{\mathcal{A}} = \frac{r}{2}v_z\,\vec{u_\theta} + A\,r^\beta\sin(\beta\theta)\,\vec{u_z}$.

• On en déduit l'expression de la vitesse : $\vec{v} = \vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{A}} = A\beta\,r^{\beta-1}\left(\cos(\beta\theta)\,\vec{u_r} - \sin(\beta\theta)\,\vec{u_\theta}\right) + v_z\,\vec{u_z}$.

VI. À suivre...

- Il y a bien d'autres exemples intéressants, mais je n'ai pas le temps.