DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS - exercices

I. Vidage d'un récipient cylindrique

• Un récipient cylindrique, de section horizontale S, est muni à sa base d'un tube d'écoulement de section s. Ce récipient est initialement rempli d'une hauteur h de liquide incompressible, de masse volumique ρ. On suppose que l'écoulement est quasi-stationnaire.

a) Calculer l'évolution de la hauteur de liquide z(t) en fonction du temps.

b) En déduire la durée nécessaire au vidage complet.

II. Écoulement à abaissement uniforme

• Un récipient rempli de liquide incompressible, de masse volumique ρ, est muni à sa base d'un tube d'écoulement de section s. La surface de section horizontale du récipient, notée S(z), dépend de la hauteur z mesurée à partir du fond. On suppose que l'écoulement est quasi-stationnaire.

a) Est-il possible d'imposer la forme du récipient, c'est-à-dire S(z), pour que la vitesse $v(t) = -\frac{dz}{dt}$ d'abaissement de la surface supérieure du liquide soit constante ?

b) En supposant que le récipient est à symétrie cylindrique, à quelle variation R(z) cela correspond-il pour le rayon ?

III. Écoulement à débit constant

• Un récipient rempli de liquide incompressible, de masse volumique ρ, est muni à sa base d'un tube d'écoulement de section s. La surface de section horizontale du récipient, notée S(z), dépend de la hauteur z mesurée à partir du fond. On suppose que l'écoulement est quasi-stationnaire.

a) Est-il possible d'imposer la forme du récipient, c'est-à-dire S(z), pour que le débit D de l'écoulement soit constant ?

b) En supposant que le récipient est à symétrie cylindrique, à quelle variation R(z) cela correspond-il pour le rayon ? Est-ce plausible ?

IV. Écoulement d'un fluide autour d'une boule en mouvement

• Une boule de rayon R se déplace, avec une vitesse $\vec{\upsilon}$, dans un fluide parfait incompressible. On désire étudier l'écoulement du fluide, en décrivant son champ de vitesse $\vec{v}$ à l'aide d'un potentiel Φ, puis l'influence réciproque du fluide sur la boule.

1. a) Justifier qu'on peut décrire le potentiel en l'étudiant selon un repère mobile associé aux coordonnées sphériques centrées sur la boule (en mouvement), avec un axe polaire orienté selon $\vec{\upsilon}$.

b) Compte tenu des symétries, montrer qu'on est amené à chercher les solutions de l'équation $\Delta\Phi = 0$ sous la forme $\Phi(r, \theta, \varphi) = f(r).Y(\theta, \varphi)$ (où les fonctions Y sont nommées “harmoniques sphériques”).

c) Montrer qu'on en déduit les équations suivantes, où λ est une constante :

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{df(r)}{\partial r}\right) - \lambda\, f(r) = 0 \quad ; \quad \frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda\, Y = 0.$$

☞ indication : en coordonnées sphériques : $\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right)$.

2. a) Montrer que les solutions de l'équation radiale sont de la forme : $f(r) = A\, r^{\alpha} + \frac{B}{r^{\alpha+1}}$ (et préciser la valeur de la constante α).

b) Justifier que, dans le cas étudié ici, il faut se limiter aux puissances strictement négatives.

3. • La résolution de l'équation angulaire montre que l'effet des angles peut s'exprimer à l'aide des polynômes de Legendre, mais on ajoute ici un autre argument.

a) Justifier que le potentiel Φ cherché est linéaire par rapport à la vitesse $\vec{\upsilon}$.

b) En l'absence de pesanteur, justifier que la dépendance angulaire s'exprimer par : $\Phi = \beta\ \vec{\upsilon} \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^{\alpha}}\right)$.

c) Pour un fluide contenu dans un récipient limité (mais assez grand pour que l'effet des bords soit négligeable sur les lignes de courant), justifier que la pesanteur ne change rien à la conclusion précédente.

d) Justifier qu'on doit retrouver $\vec{v} \cdot \vec{u_r} = \vec{\upsilon} \cdot \vec{u_r}$ à la surface de la boule.

e) Justifier que la solution cherchée est de la forme la plus simple : $\Phi = \beta\ \vec{\upsilon} \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)$.

f) En déduire la constante β et l'expression de la vitesse $\vec{v}$.

☞ indication : en coordonnées sphériques : $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r} ; \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} ; \frac{1}{r \sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$.

4. a) Exprimer la relation de Bernoulli.

b) Justifier qu'il faut considérer à la surface de la sphère : $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{d\Phi}{dt} - \vec{\upsilon} \cdot \vec{\nabla}(\Phi)$.

c) En déduire l'expression de la pression à la surface de la boule.

d) En déduire par intégration la résultante $\vec{F}$ des forces pressantes.

e) Lors de l'intégration précédente, l'un des termes (proportionnel à υ^2) donne une contribution nulle, l'autre (proportionnel à $\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$) donne une force de traînée généralement non nulle ; commentez.

V. Lignes de courant dans un dièdre

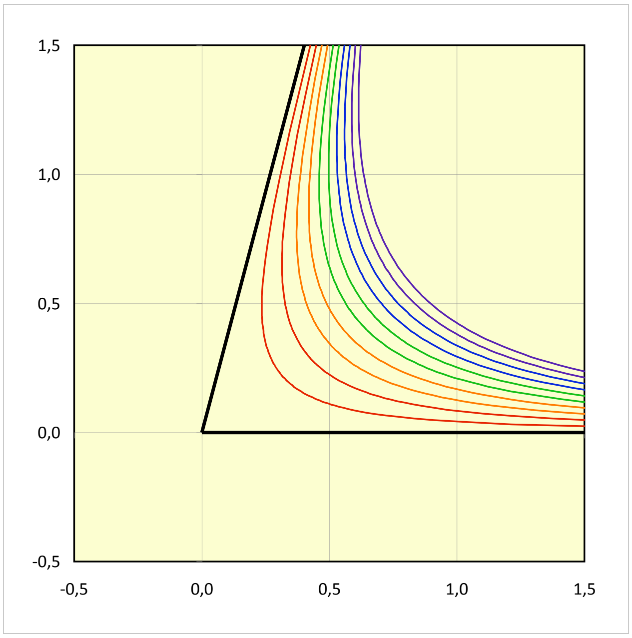
1. • On étudie l'écoulement d'un fluide incompressible dans un dièdre d'angle α délimité par deux plans “infinis”. On suppose d'abord que l'écoulement reste perpendiculaire à l'arête.

a) Exprimer la vitesse $\vec{v}$ du fluide en raisonnant avec un potentiel Φ.

b) En déduire les lignes de courant.

☞ indication : en coordonnées cylindriques :

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}.$$



2. • Généraliser au cas où la vitesse peut avoir une composante parallèle à l'arête.

☞ indication : commencer par étudier les symétries du dispositif pour en déduire les invariances du champ de vitesse.

3. • Reprendre le même problème en exprimant la vitesse $\vec{v}$ du fluide à l'aide d'un potentiel vecteur $\vec{\mathcal{A}}$.

☞ indication : en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{A}} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathcal{A}_\theta}{\partial z}\right)\vec{u_r} + \left(\frac{\partial \mathcal{A}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial r}\right)\vec{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r\mathcal{A}_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial \mathcal{A}_r}{\partial \theta}\right)\vec{u_z}.$$

VI. À suivre...

- Il y a bien d'autres exemples intéressants, mais je n'ai pas le temps.