

Surface minimale et Caténoïde

On cherche l'aire minimale vérifiant les conditions aux limites

$$\begin{aligned}
 & > A := \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} 2 \pi \cdot \rho(x) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} \rho(x) \right)^2} dx \\
 & A := \int_{-\frac{1}{2} h}^{\frac{1}{2} h} 2 \pi \rho(x) \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} \rho(x) \right)^2} dx \quad (1)
 \end{aligned}$$

La solution donne une forme de chaînette

$$\begin{aligned}
 & > \rho := x \rightarrow \rho_0 \cdot \cosh\left(\frac{x}{\rho_0}\right) \\
 & \rho := x \rightarrow \rho_0 \cosh\left(\frac{x}{\rho_0}\right) \quad (2)
 \end{aligned}$$

L'expression de l'aire minimale n'est pas simplifiée automatiquement

$$\begin{aligned}
 & > A \\
 & 2 \pi \rho_0^2 \sinh\left(\frac{1}{2} \frac{h}{\rho_0}\right) \sqrt{1 + \sinh\left(\frac{1}{2} \frac{h}{\rho_0}\right)^2} + 2 \pi \rho_0^2 \operatorname{arcsinh}\left(\sinh\left(\frac{1}{2} \frac{h}{\rho_0}\right)\right) \quad (3)
 \end{aligned}$$

On force la simplification (compte tenu du cas particulier étudié)

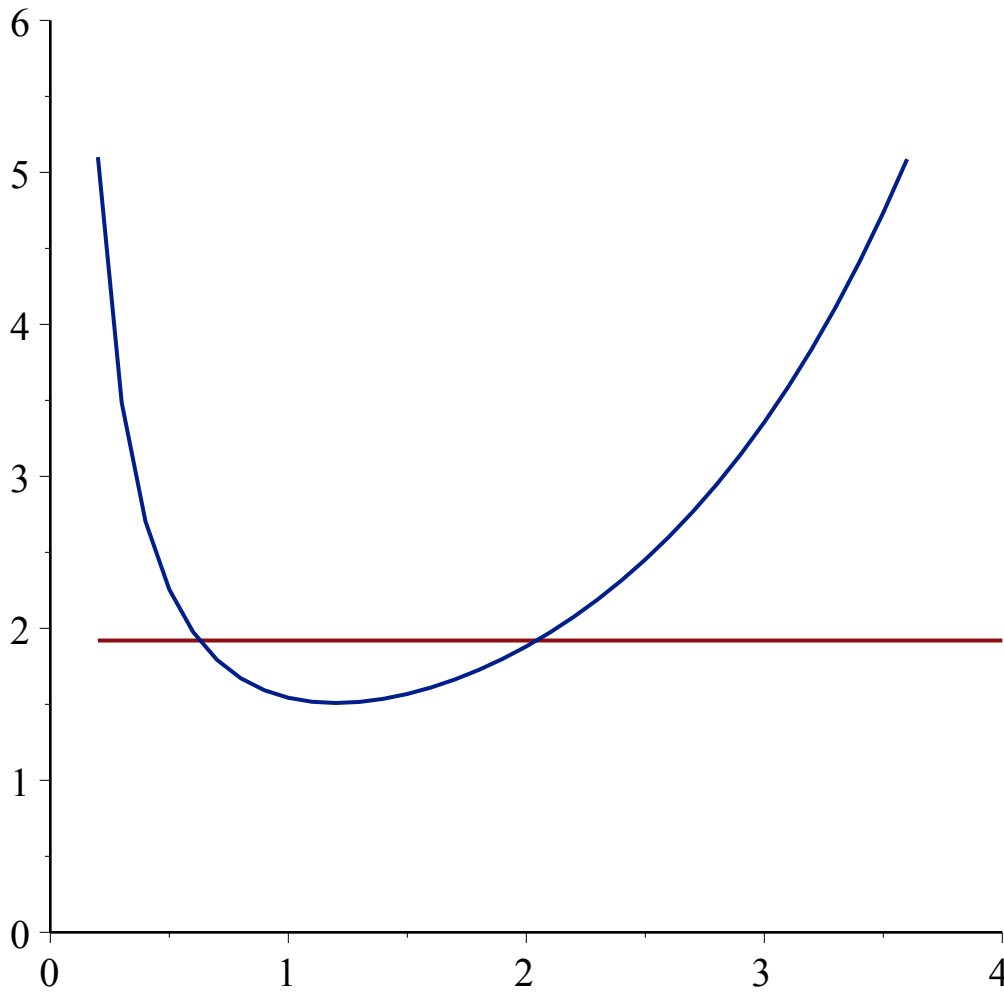
$$\begin{aligned}
 & > AA := 2 \pi \rho_0^2 \left(\int_{-z}^z \cosh(x)^2 dx \right) \\
 & AA := 2 \pi \rho_0^2 (\cosh(z) \sinh(z) + z) \quad (4)
 \end{aligned}$$

En notant $y := \frac{2 R}{h}$ et $z := \frac{h}{2 \rho_0}$ la condition limite se simplifie

$$\begin{aligned}
 & > y := z \rightarrow \frac{\cosh(z)}{z} \\
 & y := z \rightarrow \frac{\cosh(z)}{z} \quad (5)
 \end{aligned}$$

On prépare la courbe et on montre l'existence des deux solutions (dans le cas particulier correspondant à la manipulation)

$$\begin{aligned}
 & > yy := \left[seq\left(\left[evalf\left(\frac{i}{10}\right), evalf\left(y\left(\frac{i}{10}\right)\right)\right], i = 2 \dots 36 \right) \right] : \\
 & > yyy := \left[[0.2, 1.92], [fsolve(y(z) = 1.92, z = 0.2 \dots 1.5), 1.92], [fsolve(y(z) = 1.92, z = 1.5 \dots 4), 1.92], [4, 1.92] \right] : \\
 & > plot(\{yy, yyy\}, coordinateview = [0 \dots 4, 0 \dots 6])
 \end{aligned}$$



On trace les variation de l'aire en fonction de y (à un facteur près $\pi \frac{h^2}{2}$), pour les deux solutions

$$> B := z \rightarrow \frac{(\cosh(z) \sinh(z) + z)}{z^2}$$

$$B := z \rightarrow \frac{\cosh(z) \sinh(z) + z}{z^2}$$

(6)

$$> zsup := plot\left(\left[seq\left(\left[evalf\left(\frac{i}{10}\right), B\left(fsolve\left(y(z) = evalf\left(\frac{i}{10}\right), z = 1.5..4\right)\right)\right], i = 16..36\right)\right],\right. \\ \left.color = red, thickness = 2\right):$$

$$> zinf := plot\left(\left[seq\left(\left[evalf\left(\frac{i}{10}\right), B\left(fsolve\left(y(z) = evalf\left(\frac{i}{10}\right), z = 0.2..1.5\right)\right)\right], i = 16..36\right)\right],\right. \\ \left.color = "DarkGreen", thickness = 2\right):$$

On vérifie que l'aire est plus grande pour la solution z plus grande, correspondant à ρ_0 plus petit

$$> plots[display](\{zsup, zinf\}, coordinateview = [0..4, 0..14], labels = ["y", "2 A(y) / \pi h^2"], \\ labeldirections = [horizontal, vertical], labelfont = ["HELVETICA", "ITALIC", 16])$$

