Surface minimale et Caténoïde

On cherche l'aire minimale vérifiant les conditions aux limites

$> A := \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} 2\,\pi \cdot \rho(x) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}\,\rho(x)\right)^2}\, dx$

$$A := \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} 2\,\pi\,\rho(x)\,\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}\,\rho(x)\right)^2}\, dx \tag{1}$$

La solution donne une forme de chaînette

$> \rho := x \rightarrow \rho 0 \cdot \cosh\left(\frac{x}{\rho 0}\right)$

$$\rho := x \rightarrow \rho 0 \cosh\left(\frac{x}{\rho 0}\right) \tag{2}$$

L'expression de l'aire minimale n'est pas simplifiée automatiquement

$> A$

$$2\,\pi\,\rho 0^2 \sinh\left(\frac{1}{2}\,\frac{h}{\rho 0}\right)\sqrt{1 + \sinh\left(\frac{1}{2}\,\frac{h}{\rho 0}\right)^2} + 2\,\pi\,\rho 0^2 \operatorname{arcsinh}\left(\sinh\left(\frac{1}{2}\,\frac{h}{\rho 0}\right)\right) \tag{3}$$

On force la simplification (compte tenu du cas particulier étudié)

$> AA := 2\,\pi\,\rho 0^2 \left(\int_{-z}^{z} \cosh(x)^2\, dx\right)$

$$AA := 2\,\pi\,\rho 0^2 \left(\cosh(z)\sinh(z) + z\right) \tag{4}$$

En notant $y := \frac{2\,R}{h}$ et $z := \frac{h}{2\,\rho 0}$ la condition limite se simplifie

$> y := z \rightarrow \frac{\cosh(z)}{z}$

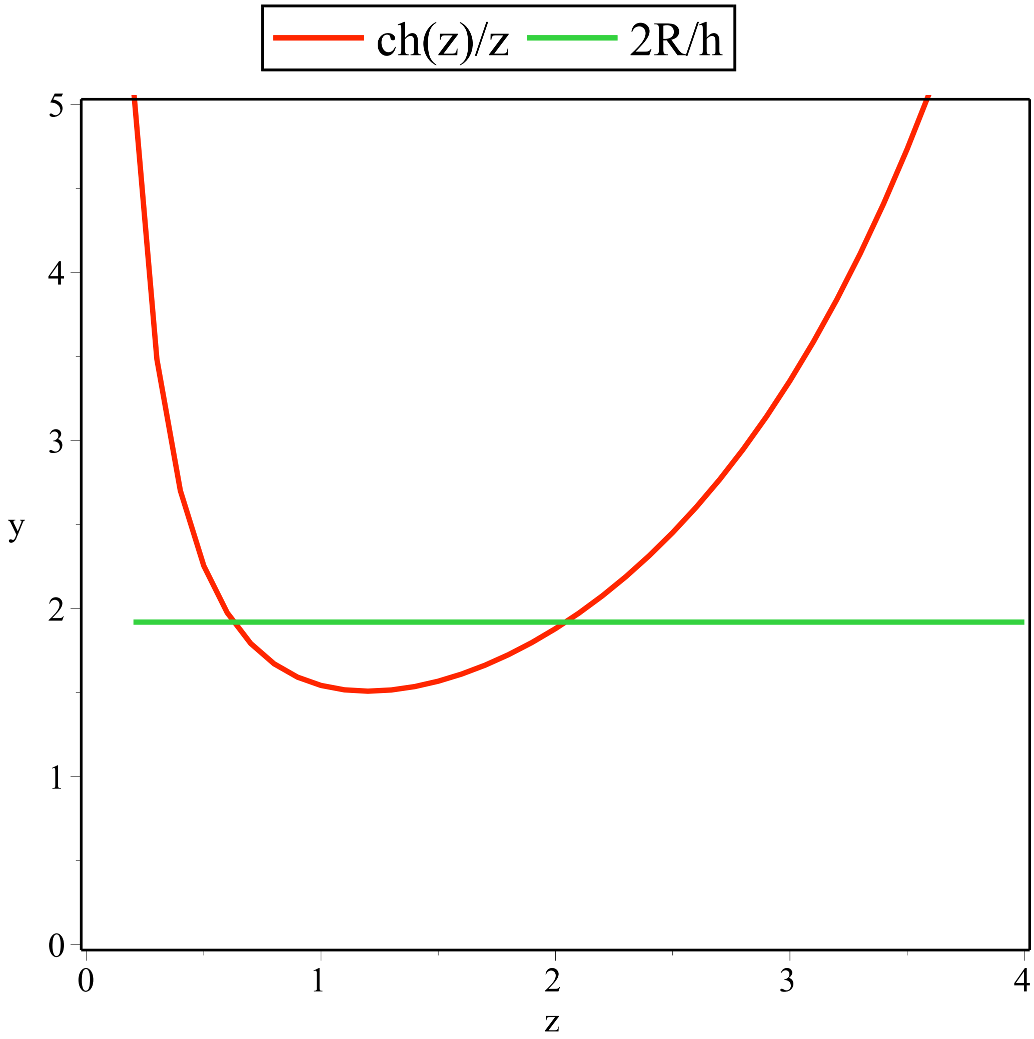
$$y := z \rightarrow \frac{\cosh(z)}{z} \tag{5}$$

On prépare la courbe et on montre l'existence des deux solutions (dans le cas particulier correspondant à la manipulation)

$> yy := \left[seq\left(\left[evalf\left(\frac{i}{10}\right), evalf\left(y\left(\frac{i}{10}\right)\right)\right], i = 2..36\right)\right]:$

$> yyy := [[0.2, 1.92], [fsolve(y(z) = 1.92, z = 0.2..1.5), 1.92], [fsolve(y(z) = 1.92, z = 1.5..4), 1.92], [4, 1.92]]:$

$> plot(\{yy, yyy\})$



On trace les variation de l'aire en fonction de y (à un facteur près $\pi\frac{h^2}{2}$), pour les deux solutions

> $B := z \rightarrow \frac{(\cosh(z)\ \sinh(z) + z)}{z^2}$

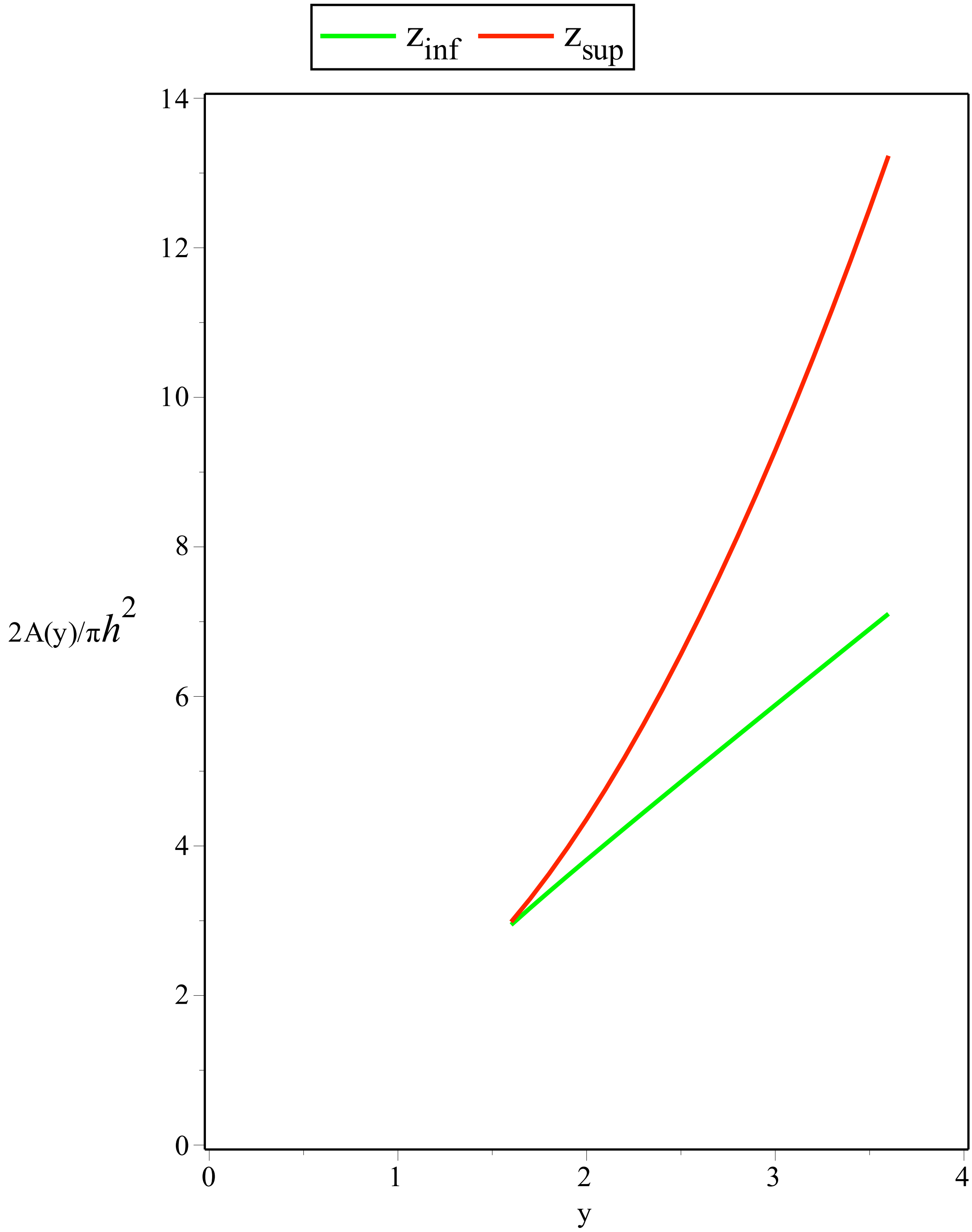
$$B := z \rightarrow \frac{\cosh(z)\ \sinh(z) + z}{z^2} \tag{6}$$

> $zsup := plot\left(\left[seq\left(\left[evalf\left(\frac{i}{10}\right), B\left(fsolve\left(y(z) = evalf\left(\frac{i}{10}\right), z = 1.5..4\right)\right)\right], i = 16..36\right)\right], color = red\right):$

> $zinf := plot\left(\left[seq\left(\left[evalf\left(\frac{i}{10}\right), B\left(fsolve\left(y(z) = evalf\left(\frac{i}{10}\right), z = 0.2..1.5\right)\right)\right], i = 16..36\right)\right], color = green\right):$

On vérifie que l'aire est plus grande pour la solution z plus grande, correspondant à ρ0 plus petit

> $plots[display](\{zsup, zinf\})$



z_{inf}
z_{sup}
$2A(y)/\pi h^2$
y
0
2
4
6
8
10
12
14
0
1
2
3
4

>